

# 様相論理の体系と Lindenbaum の補題

2021 年 6 月 24 日, しらそら

<https://silasolla.github.io/>

この記事では様相論理の特に統語論に関する話題をまとめています。様相論理の体系の定義から始めて、Lindenbaum の補題を導きます。Kripke 模型など意味論の話題をばっさりと切り捨てているので、様相論理らしさがあまり感じられないかもしれません。内容は概ね文献 [1] に沿っています。

## 1 様相論理の体系

はじめに、様相論理における文 (sentence) を帰納的に定義します。

DEFINITION 1.1 (文).

文を帰納的に定義する。

1.  $\mathbb{P}_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) は文である。
2.  $\top$  は文である。
3.  $\perp$  は文である。
4.  $A$  が文ならば  $\neg A$  は文である。
5.  $A, B$  が文ならば  $A \wedge B$  は文である。
6.  $A, B$  が文ならば  $A \vee B$  は文である。
7.  $A, B$  が文ならば  $A \rightarrow B$  は文である。
8.  $A, B$  が文ならば  $A \leftrightarrow B$  は文である。
9.  $A$  が文ならば  $\Box A$  は文である。
10.  $A$  が文ならば  $\Diamond A$  は文である。
11. 上記によって構成されるものだけが文である。

特に 1,9,10 を **命題原子** (propositionally atomic) という。

様相論理における文は、9,10 を除けば命題論理の論理式と同じ形をしています。統語論のみに絞った記事なので詳細は割愛しますが、 $\Box$  と  $\Diamond$  はそれぞれ必然記号 (necessity sign), 可能記号 (possibility sign) といい、それらを含めた各々の文の (様相論理での) 真偽は Kripke 模型 (Kripke model) と世界 (world) を与えられることによって決定されます。

DEFINITION 1.2 (tautology).

文  $A$  が *tautology* であるとは、命題原子を命題変数とみなしたとき、 $A$  は古典命題論理の意味での tautology となっていることをいう。

古典命題論理の意味での tautology とは、任意の付値 (valuation) に対して、文 (論理式) が真であることをいいます。なお、古典命題論理には健全 (sound) かつ完全 (complete) であるような、すなわち、証明できることと、tautology であることが同値であるような証明体系がいくつか存在します。例えば、自然演繹体系 (現代数学で一般的に用いられている推論を形式化した演繹体系) は健全かつ完全であることが分かっています。詳細は割愛するので、

適当な数理論理学の書籍<sup>1)</sup>を参照してください。

DEFINITION 1.3 (tautological consequence).

文  $A$  が文の有限列  $A_1, \dots, A_n$  の *tautological consequence* であるとは、 $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow A$  が tautology であることをいう。  $A$  が  $A_1, \dots, A_n$  の tautological consequence であるとき、 $A_1, \dots, A_n \models^{tauto} A$  と書く。特に、文の列が空であるとき、すなわち  $A$  が tautology であるときは  $\models^{tauto} A$  と書く。

意味論の話題なので詳細は割愛しますが、実は様相論理の意味論は古典命題論理の意味論を内包しており、tautology ならば様相論理でも恒真 (valid) であることが知られています。すなわち、 $A_1, \dots, A_n \models^{tauto} A$  ならば  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow A$  は様相論理で恒真です。さらに、様相論理での解釈の定義を用いると、 $A_1, \dots, A_n$  が様相論理において恒真ならば  $A$  も恒真であることが成立します。従って、 $A_1, \dots, A_n \models^{tauto} A$  ならば、 $A$  は  $A_1, \dots, A_n$  の様相論理における論理的帰結 (logical consequence) となります。

古典命題論理の自然演繹体系の健全性と完全性から、次の命題が成立します。

PROPOSITION 1.4.

$A_1, \dots, A_n \models^{tauto} A$  であることと、 $A_1, \dots, A_n$  を仮定して古典命題論理の自然演繹体系で  $A$  を導けることは同値。

ついに様相論理の体系を定義する準備ができました。様相論理の体系であることは文の集合が tautological consequence で閉じていることを用いて定義します。

DEFINITION 1.5 (様相論理の体系).

文の集合  $\Sigma$  の任意の文の有限列  $A_1, \dots, A_n$  に対して、 $A_1, \dots, A_n \models^{tauto} A$  であるようなすべての文  $A$  が  $\Sigma$  に含まれるとき、 $\Sigma$  を **様相論理の体系** (system of modal logic) とよぶ。今後、様相論理の体系を単に体系とよび、 $\Sigma$  は任意の体系を表す変数とする。

任意の文の集合は文の空列を含むので、任意の体系  $\Sigma$  はすべての tautology を含みます。なお、 $A_1, \dots, A_n \models^{tauto} A$  ならば  $A$  は  $A_1, \dots, A_n$  の様相論理における論理的帰結になっていることが、様相論理の体系とよばれる所以です。

## 2 定理と導出可能性

定理 (theorem) と導出可能性 (deducibility) の概念は集合論を用いて定義されます。

DEFINITION 2.1 (定理).

体系  $\Sigma$  の **定理** とは  $\Sigma$  の元のことである。文  $A$  が  $\Sigma$  の定理であるとき  $\vdash_{\Sigma} A$  と書く。

DEFINITION 2.2 (導出可能性).

文の集合  $\Gamma$  が  $\vdash_{\Sigma} (A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow A$  であるような有限個の文  $A_1, \dots, A_n$  を含むとき、 $A$  は  $\Gamma$  から  $\Sigma$  **導出可能** であるという。  $A$  は  $\Gamma$  から  $\Sigma$  導出可能であるとき、 $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$  と書く。  $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$  でないとき、 $\Gamma \not\vdash_{\Sigma} A$  と書く。

定理と導出可能性に関するいくつかの補題を証明します。

LEMMA 2.3.

$\vdash_{\Sigma} A$  であることと  $\emptyset \vdash_{\Sigma} A$  であることは同値。

---

<sup>1)</sup> 例えば、D. van Dalen の Logic and Structure[2] には証明が載っています。

*Proof.*  $(\Rightarrow) \vdash_{\Sigma} A$  とする. これは  $\vdash_{\Sigma} A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow A$  で  $n = 0$  であることを意味する.  $\emptyset$  は 0 個の文を含むので  $\emptyset \vdash_{\Sigma} A$  となる.

$(\Leftarrow) \emptyset \vdash_{\Sigma} A$  とする. このとき  $\emptyset$  は  $\vdash_{\Sigma} A$  となるような 0 個の文をもつ. 従って,  $\vdash_{\Sigma} A$  である. □

LEMMA 2.4.

$A \in \Gamma$  ならば  $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$ . 特に  $\{A\} \vdash_{\Sigma} A$ .

*Proof.*  $A \in \Gamma$  とする.  $\Sigma$  は  $\models^{tauto}$  で閉じており, すべての tautology を含むので,  $A \rightarrow A \in \Sigma$ . よって,  $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$ . □

LEMMA 2.5.

$\Gamma \vdash_{\Sigma} B$  かつ  $\{B\} \vdash_{\Sigma} A$  ならば,  $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$

*Proof.*  $\Gamma \vdash_{\Sigma} B$  かつ  $\{B\} \vdash_{\Sigma} A$  とする.  $\Gamma \vdash_{\Sigma} B$  より,  $\vdash_{\Sigma} A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$  となるような  $A_1, \dots, A_n \in \Gamma$  が存在する.  $\{B\} \vdash_{\Sigma} A$  より  $\vdash_{\Sigma} A$  または  $\vdash B \rightarrow A$ .  $\vdash_{\Sigma} A$  のときはよい.  $\vdash_{\Sigma} B \rightarrow A$  のとき,  $B \rightarrow A \in \Sigma$ . 古典命題論理で以下の導出木が構成できるので,  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B, B \rightarrow A \models^{tauto} A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow A$  である.

$$\frac{\frac{B \rightarrow A \quad \frac{A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B \quad [A_1 \wedge \dots \wedge A_n]^1}{B \rightarrow E}}{A}{A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow A} \rightarrow I^1}{\rightarrow E}$$

$\Sigma$  は  $\models^{tauto}$  で閉じているので,  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow A \in \Sigma$ . よって  $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$ . □

LEMMA 2.6.

$\Gamma \vdash_{\Sigma} A$  かつ  $\Gamma \subseteq \Delta$  ならば,  $\Delta \vdash_{\Sigma} A$ .

*Proof.*  $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$  かつ  $\Gamma \subseteq \Delta$  とする.  $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$  より,  $\vdash_{\Sigma} A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow A$  であるような  $A_1, \dots, A_n \in \Gamma$  が存在する. このとき,  $\Gamma \subseteq \Delta$  より,  $A_1, \dots, A_n \in \Delta$ . 従って,  $\Gamma \subseteq \Delta$ . □

LEMMA 2.7.

$\Gamma \vdash_{\Sigma} A$  であることと,  $\Gamma$  に  $\Delta \vdash_{\Sigma} A$  であるような有限部分集合  $\Delta$  が存在することは同値.

*Proof.*

$$\begin{aligned} \Gamma \vdash_{\Sigma} A &\iff \exists A_1, \dots, A_n \in \Gamma. A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow A \in \Sigma \\ &\iff \exists \{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \Gamma. \{A_1, \dots, A_n\} \vdash_{\Sigma} A. \end{aligned}$$

□

LEMMA 2.8 (演繹定理).

$\Gamma \vdash_{\Sigma} A \rightarrow B$  であることと,  $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\Sigma} B$  であることは同値.

*Proof.* 古典命題論理で以下の導出木が構成できるので,  $C_1 \wedge \dots \wedge C_n \rightarrow A \rightarrow B \models^{tauto} C_1 \wedge \dots \wedge C_n \wedge A \rightarrow B$  である.

$$\frac{\frac{C_1 \wedge \dots \wedge C_n \rightarrow A \rightarrow B \quad \frac{[C_1 \wedge \dots \wedge C_n \wedge A]^1}{C_1 \wedge \dots \wedge C_n} \rightarrow E \quad \wedge E}{A \rightarrow B} \quad \frac{[C_1 \wedge \dots \wedge C_n \wedge A]^1}{A} \wedge E}{\frac{B}{C_1 \wedge \dots \wedge C_n \wedge A \rightarrow B} \rightarrow I^1} \rightarrow E$$

さらに以下の導出木も古典命題論理で構成できるので、 $C_1 \wedge \dots \wedge C_n \wedge A \rightarrow B \models^{tauto} C_1 \wedge \dots \wedge C_n \rightarrow A \rightarrow B$ である。

$$\frac{\frac{C_1 \wedge \dots \wedge C_n \wedge A \rightarrow B \quad \frac{[C_1 \wedge \dots \wedge C_n]^1 \quad [A]^2}{C_1 \wedge \dots \wedge C_n \wedge A} \wedge I}{B} \wedge I}{\frac{A \rightarrow B}{C_1 \wedge \dots \wedge C_n \rightarrow A \rightarrow B} \rightarrow I^2} \rightarrow I^1$$

また、 $\Sigma$  は  $\models^{tauto}$  で閉じているので、一般性を失わず、 $C_1 \wedge \dots \wedge C_n \rightarrow A \rightarrow B \in \Sigma \iff C_1 \wedge \dots \wedge C_n \wedge A \rightarrow B \in \Sigma$  である。よって

$$\begin{aligned} \Gamma \vdash_{\Sigma} A \rightarrow B &\iff \exists C_1, \dots, C_n \in \Gamma. C_1 \wedge \dots \wedge C_n \rightarrow A \rightarrow B \in \Sigma \\ &\iff \exists C_1, \dots, C_n \in \Gamma. C_1 \wedge \dots \wedge C_n \wedge A \rightarrow B \in \Sigma \\ &\iff \Gamma \cup \{A\} \vdash_{\Sigma} B. \end{aligned}$$

□

### 3 無矛盾性

無矛盾性 (consistency) とは、読んで字のごとく、矛盾を導けない性質のことです。

DEFINITION 3.1 (無矛盾性).

文の集合  $\Gamma$  が  $\Sigma$  無矛盾 ( $\Sigma$  consistent) であるとは、 $\Gamma \not\vdash_{\Sigma} \perp$  であることをいう。  $\Gamma$  が  $\Sigma$  無矛盾であるとき、 $\text{Con}_{\Sigma}\Gamma$  と書く。  $\text{Con}_{\Sigma}\Gamma$  でないとき、 $\text{C}\emptyset_{\Sigma}\Gamma$  と書く。

無矛盾性に関するいくつかの補題を証明します。

LEMMA 3.2.

文の集合  $\Gamma$  に対して、 $\text{C}\emptyset_{\Sigma}\Gamma$  であることと、 $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$  かつ  $\Gamma \vdash_{\Sigma} \neg A$  となる  $A$  が存在することは同値。

*Proof.*  $(\Rightarrow)$   $\text{C}\emptyset_{\Sigma}\Gamma$  とする。定義より  $\Gamma \vdash_{\Sigma} \perp$ 。古典命題論理では  $\perp$  から任意の命題が導けるので、特にある  $A$  が存在して、 $\perp \rightarrow A, \perp \rightarrow \neg A$  が導ける。  $\Sigma$  は  $\models^{tauto}$  で閉じているので、 $\perp \rightarrow A, \perp \rightarrow \neg A \in \Sigma$ 。よって、 $\{\perp\} \vdash_{\Sigma} A$  かつ  $\{\perp\} \vdash_{\Sigma} \neg A$ 。LEMMA 2.5 より、 $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$  かつ  $\Gamma \vdash_{\Sigma} \neg A$ 。

$(\Leftarrow)$   $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$  かつ  $\Gamma \vdash_{\Sigma} \neg A$  となる  $A$  があるとする。このとき、 $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow A, A'_1 \wedge \dots \wedge A'_m \rightarrow \neg A \in \Sigma$  となるような  $A_1, \dots, A_n, A'_1, \dots, A'_m \in \Gamma$  が存在する。古典命題論理で以下の導出木が構成できるので、 $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow A, A'_1 \wedge \dots \wedge A'_m \rightarrow \neg A \models^{tauto} A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge A'_1 \wedge \dots \wedge A'_m \rightarrow \perp$  である。

$$\frac{\frac{A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow A \quad \frac{[A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge A'_1 \wedge \dots \wedge A'_m]^1}{A_1 \wedge \dots \wedge A_n} \wedge E}{A} \wedge E \quad \frac{A'_1 \wedge \dots \wedge A'_m \rightarrow \neg A \quad \frac{[A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge A'_1 \wedge \dots \wedge A'_m]^1}{A'_1 \wedge \dots \wedge A'_m} \wedge E}{\neg A} \wedge E}{\frac{\perp}{A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge A'_1 \wedge \dots \wedge A'_m \rightarrow \perp} \rightarrow I^1} \perp I$$

$\Sigma$  は  $\models^{tauto}$  で閉じているので、 $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge A'_1 \wedge \dots \wedge A'_m \rightarrow \perp \in \Sigma$ 。従って、 $\Gamma \vdash_{\Sigma} \perp$ 、すなわち  $\text{C}\emptyset_{\Sigma}\Gamma$ 。 □

LEMMA 3.3.

文の集合  $\Gamma$  に対して、 $\text{Con}_{\Sigma}\Gamma$  かつ  $\Delta \subseteq \Gamma$  ならば、 $\text{Con}_{\Sigma}\Delta$ 。

*Proof.*  $\text{Con}_{\Sigma}\Gamma$  かつ  $\Delta \subseteq \Gamma$  とする。  $\text{C}\emptyset_{\Sigma}\Delta$  とすると、 $\Delta \vdash_{\Sigma} \perp$ 。LEMMA 2.6 より、 $\Gamma \vdash_{\Sigma} \perp$ 。よって、 $\text{C}\emptyset_{\Sigma}\Gamma$ 。これは  $\text{Con}_{\Sigma}\Gamma$  であることに矛盾する。従って、 $\text{Con}_{\Sigma}\Delta$ 。 □

LEMMA 3.4.

無矛盾性は *compact* である. すなわち, 文の集合  $\Gamma$  に対して,  $\text{Con}_\Sigma \Gamma$  であることと,  $\forall \Delta \subseteq \Gamma. |\Delta| < \infty \Rightarrow \text{Con}_\Sigma \Delta$  であることは同値.

*Proof.* 対偶を示す.

$$\begin{aligned} \text{Con}_\Sigma \Gamma &\iff \Gamma \vdash_\Sigma \perp \\ &\iff \exists \Delta \subseteq \Gamma. |\Delta| < \infty \wedge \Delta \vdash_\Sigma \perp \text{ (LEMMA 2.7)} \\ &\iff \exists \Delta \subseteq \Gamma. |\Delta| < \infty \wedge \text{Con}_\Sigma \Delta. \end{aligned}$$

□

LEMMA 3.5.

文の集合  $\Gamma$  に対して,  $\Gamma \vdash_\Sigma A$  であることと,  $\text{Con}_\Sigma \Gamma \cup \{\neg A\}$  であることは同値.

*Proof.*  $(\Rightarrow)$   $\Gamma \vdash_\Sigma A$  とすると, LEMMA 2.6 より,  $\Gamma \cup \neg A \vdash_\Sigma A$ . 一方, LEMMA 2.4 より,  $\Gamma \cup \neg A \vdash_\Sigma \neg A$ . LEMMA 3.2 より,  $\text{Con}_\Sigma \Gamma \cup \{\neg A\}$ .

$(\Leftarrow)$   $\text{Con}_\Sigma \Gamma \cup \{\neg A\}$  とすると, 定義より  $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash_\Sigma \perp$ . LEMMA 2.8 より,  $\Gamma \vdash_\Sigma \neg A \rightarrow \perp$ . また, 古典命題論理で以下の証明木が構成できるので  $\models^{\text{tauto}} (\neg A \rightarrow \perp) \rightarrow A$  で,  $\Sigma$  は  $\models^{\text{tauto}}$  で閉じているので  $(\neg A \rightarrow \perp) \rightarrow A \in \Sigma$  である.

$$\frac{\frac{[\neg A \rightarrow \perp]^1 \quad [\neg A]^2}{\perp} \rightarrow E}{\frac{\perp}{A} \text{ RAA}^2} \rightarrow I^1}{(\neg A \rightarrow \perp) \rightarrow A} \rightarrow I^1$$

従って,  $\{\neg A \rightarrow \perp\} \vdash_\Sigma A$ . LEMMA 2.5 より,  $\Gamma \vdash_\Sigma A$ .

□

LEMMA 3.6.

文の集合  $\Gamma$  に対して,  $\text{Con}_\Sigma \Gamma \cup \{A\}$  であることと,  $\Gamma \vdash_\Sigma \neg A$  であることは同値.

*Proof.* 古典命題論理で以下の導出木が構成できることと,  $\Sigma$  が  $\models^{\text{tauto}}$  で閉じていることから, 一般性を失わず,  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow A \rightarrow \perp \in \Sigma \iff A_1 \wedge \dots \wedge A_n \neg A \in \Sigma$  である.

$$\frac{\frac{\frac{A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow A \rightarrow \perp \quad [A_1 \wedge \dots \wedge A_n]^1}{A \rightarrow \perp} \rightarrow E \quad [A]^2}{\perp} \rightarrow E}{\frac{\perp}{\neg A} \neg I^2} \rightarrow I^1}{A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow \neg A} \rightarrow I^1 \quad \frac{[A]^2 \quad \frac{\frac{A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow \neg A \quad [A_1 \wedge \dots \wedge A_n]^1}{\neg A} \rightarrow E}{\perp} \rightarrow E}{\frac{\perp}{A \rightarrow \perp} \rightarrow I^2} \rightarrow I^1}{A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow A \rightarrow \perp} \rightarrow I^1$$

対偶を示す.

$$\begin{aligned} \text{Con}_\Sigma \Gamma \cup \{A\} &\iff \Gamma \cup \{A\} \vdash_\Sigma \perp \\ &\iff \Gamma \vdash_\Sigma A \rightarrow \perp \text{ (LEMMA 2.8)} \\ &\iff \exists A_1, \dots, A_n \in \Gamma. A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow A \rightarrow \perp \in \Sigma \\ &\iff \exists A_1, \dots, A_n \in \Gamma. A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow \neg A \in \Sigma \\ &\iff \Gamma \vdash_\Sigma \neg A. \end{aligned}$$

□

## 4 極大性

極大性 (maximality) をもつ文の集合とは、直感的には、これ以上元を追加すると無矛盾性が失われてしまうような無矛盾な集合のことです。

DEFINITION 4.1 (極大性).

文の集合  $\Gamma$  が  $\Sigma$  極大 ( $\Sigma$  maximal) であるとは、 $\text{Con}_\Sigma \Gamma$  かつ  $\forall A. \text{Con}_\Sigma \Gamma \cup \{A\} \Rightarrow A \in \Gamma$  であることをいう。  $\Gamma$  が  $\Sigma$  極大であるとき、 $\text{Max}_\Sigma \Gamma$  と書く。

極大性をもつ文の集合にはよい性質があります。今回は、次の章で使用する 2 つの補題を証明します。

LEMMA 4.2.

$\text{Max}_\Sigma \Gamma$  ならば、 $A \in \Gamma$  であることと  $\Gamma \vdash_\Sigma A$  であることは同値。

*Proof.* ( $\Rightarrow$ ) LEMMA 2.4 より成立する。

( $\Leftarrow$ )  $\Gamma \vdash_\Sigma A$  とする。  $A \notin \Gamma$  であると仮定すると、極大性の定義より  $\text{Con}_\Sigma \Gamma \cup \{A\}$  である。このとき、LEMMA 3.6 より、 $\Gamma \vdash_\Sigma \neg A$  であるが、LEMMA 3.2 より、 $\text{Con}_\Sigma \Gamma$  となる。これは、 $\text{Max}_\Sigma \Gamma$  より  $\text{Con}_\Sigma \Gamma$  であることに矛盾する。従って、 $\Gamma \vdash_\Sigma A$  である。  $\square$

LEMMA 4.3.

$\text{Max}_\Sigma \Gamma$  ならば、 $\neg A \in \Gamma$  であることと  $A \notin \Gamma$  であることは同値。

*Proof.* ( $\Rightarrow$ )  $\text{Max}_\Sigma \Gamma$  かつ  $\neg A \in \Gamma$  とする。  $A \in \Gamma$  とすると、LEMMA 4.2 より  $\Gamma \vdash_\Sigma \neg A$  かつ  $\Gamma \vdash_\Sigma A$ 。  $\text{Con}_\Sigma \Gamma$  より、これは LEMMA 3.2 に矛盾する。よって  $\neg A \notin \Gamma$ 。

( $\Leftarrow$ )  $\text{Max}_\Sigma \Gamma$  かつ  $A \notin \Gamma$  とする。  $\neg A \notin \Gamma$  とすると、LEMMA 4.2 より  $\Gamma \not\vdash_\Sigma \neg A$  かつ  $\Gamma \not\vdash_\Sigma A$ 。 LEMMA 3.5, 3.6 より  $\text{Con}_\Sigma \Gamma \cup \{A\}$  かつ  $\text{Con}_\Sigma \Gamma \cup \{\neg A\}$ 。さらに  $\text{Max}_\Sigma \Gamma$  より  $A \in \Gamma$  かつ  $\neg A \in \Gamma$  となり仮定に矛盾する。よって  $\neg A \notin \Gamma$ 。  $\square$

## 5 Lindenbaum の補題

いよいよ Lindenbaum の補題 (Lindenbaum's lemma) を証明します。この定理は、無矛盾な文の集合が極大な上位集合を必ず持つことを主張しています。

THEOREM 5.1 (Lindenbaum の補題).

$\text{Con}_\Sigma \Gamma$  ならば、 $\Gamma \subseteq \Delta$  かつ  $\text{Max}_\Sigma \Delta$  なる  $\Delta$  が存在する。

*Proof.* 文の列  $A_1, A_2, A_3, \dots$  を固定する。ただし、言語に含まれる文はそれぞれ少なくとも一度は出現するものとする。また、 $\text{Con}_\Sigma \Gamma$  とする。次に、 $\Gamma$  に対して、文の集合の列  $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots$  を帰納的に定義する。

1.  $\Delta_0 = \Gamma$ .
2.  $\Delta_n = \begin{cases} \Delta_{n-1} \cup \{A_n\} & (\text{if } \text{Con}_\Sigma \Delta_{n-1} \cup \{A_n\}) \\ \Delta_{n-1} & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (n > 0).$

このとき,  $\forall n \geq 0. \text{Con}_\Sigma \Delta_n$  であることは定義より明らか. さらに,  $\forall m \geq 0, n. m \leq n \Rightarrow \Delta_m \subseteq \Delta_n$  であることも定義より明らか.

$\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n$  と定義すると,  $\forall n \geq 0. \Delta_n \subseteq \Delta$  で, 特に  $\Gamma = \Delta_0 \subseteq \Delta$ . さらに,  $\text{Max}_\Sigma \Delta$  であることを示す. つまり, 以下の2つの命題を示す.

1.  $\text{Con}_\Sigma \Delta$ .
2.  $\forall A. \text{Con}_\Sigma \Delta \cup \{A\} \Rightarrow A \in \Delta$ .

(1) LEMMA 3.4 より,  $\forall \Delta' \subseteq \Delta. (|\Delta'| < \infty \Rightarrow \text{Con}_\Sigma \Delta')$  であることを示せばよい.  $\Delta'$  を  $\Delta$  の任意の有限部分集合とする.  $\Delta' = \emptyset$  とすると, 明らかに  $\text{Con}_\Sigma \Delta'$ .  $\Delta' \neq \emptyset$  とする.  $A_k$  を最大の添字をもつ  $\Delta'$  の要素とする. このとき,  $\Delta' \subseteq \Delta_k$  であることを示す.  $A \in \Delta'$  とすると, ある最小の  $j \leq k$  が存在して  $A = A_j$ .  $A_j \notin \Delta_j$  とすると,  $\text{Con}_\Sigma \Delta_{j-1} \cup \{A_j\}$ .  $i > j$  のとき  $\Delta_{j-1} \subseteq \Delta_j \subseteq \Delta_i$  で,  $A_j \in \Delta_i$  とすると  $\text{Con}_\Sigma \Delta_i$  かつ  $\Delta_{j-1} \cup \{A_j\} \subseteq \Delta_i$  となり, LEMMA 3.3 に矛盾する. よって  $A_j \notin \Delta_i$ . さらに,  $j$  の最小性から  $i < j$  のときは  $A_j \notin \Delta_i$  なので,  $\forall i. A_j \notin \Delta_i$  となり,  $A_j \notin \Delta$ . これは  $A_j \in \Delta' \subseteq \Delta$  に矛盾する. 従って  $A_j \in \Delta_j$ .  $\Delta_j \subseteq \Delta_k$  より  $A_j \in \Delta_k$ . よって  $A \in \Delta_k$ . ゆえに  $\Delta' \subseteq \Delta_k$ .  $\text{Con}_\Sigma \Delta_k$  なので, LEMMA 3.3 より  $\text{Con}_\Sigma \Delta'$ .

(2) 任意の文  $A$  をとり固定する.  $A$  は  $A_1, A_2, A_3, \dots$  に出現するので, ある  $k$  が存在して  $A = A_k$ . よって,  $\text{Con}_\Sigma \Delta \cup \{A\}$  とすると  $\text{Con}_\Sigma \Delta \cup \{A_k\}$ .  $\Delta_{k-1} \subseteq \Delta$  なので, LEMMA 3.3 より  $\text{Con}_\Sigma \Delta_{k-1} \cup \{A_k\}$ .  $\Delta_k$  の定義より,  $A_k \in \Delta_{k-1} \cup \{A_k\} = \Delta_k \subseteq \Delta$ . ゆえに,  $A \in \Delta$ .

以上より,  $\Gamma \subseteq \Delta$  かつ  $\text{Max}_\Sigma \Delta$  であるような  $\Delta$  の存在が示された. □

最後に, これまでの結果から導かれる定理を紹介します.

THEOREM 5.2.

文の集合  $\Gamma$  に対して,  $\Gamma \vdash_\Sigma A$  であることと,  $\forall \Delta. \Gamma \subseteq \Delta \wedge \text{Max}_\Sigma \Delta \Rightarrow A \in \Delta$  であることは同値.

*Proof.* ( $\Rightarrow$ )  $\Gamma \vdash_\Sigma A$  かつ  $\Gamma \subseteq \Delta$  かつ  $\text{Max}_\Sigma \Delta$  とする. LEMMA 2.6 より  $\Delta \vdash_\Sigma A$ . LEMMA 4.2 より  $A \in \Delta$ .

( $\Leftarrow$ ) 対偶を示す.  $\Gamma \not\vdash_\Sigma A$  とすると, LEMMA 3.5 より  $\text{Con}_\Sigma \Gamma \cup \{\neg A\}$ . THEOREM 5.1 より  $\Gamma \subseteq \Gamma \cup \{\neg A\} \subseteq \Delta$  かつ  $\text{Max}_\Sigma \Delta$  であるような  $\Delta$  が存在する.  $\neg A \in \Gamma \cup \{\neg A\} \subseteq \Delta$  であるから, LEMMA 4.3 より  $A \notin \Delta$ . □

COROLLARY 5.3.

文の集合  $\Gamma$  に対して,  $\vdash_\Sigma A$  であることと,  $\forall \Delta. \text{Max}_\Sigma \Delta \Rightarrow A \in \Delta$  であることは同値.

*Proof.*

$$\begin{aligned} \vdash_\Sigma A &\iff \emptyset \vdash_\Sigma A \text{ (LEMMA 2.3 より.)} \\ &\iff \forall \Delta. \emptyset \subseteq \Delta \wedge \text{Max}_\Sigma \Delta \Rightarrow A \in \Delta \text{ (THEOREM 5.2 より)} \\ &\iff \forall \Delta. \text{Max}_\Sigma \Delta \Rightarrow A \in \Delta \text{ (}\forall \Delta. \emptyset \subseteq \Delta \text{ は恒真).} \end{aligned}$$

□

## 参考文献

- [1] B. F. Chellas. *Modal logic an introduction*. Cambridge University Press, 1980.
- [2] D. van Dalen. *Logic and Structure 3rd Edition*. Springer, 1991.