

修士論文

置換に対する不動点制約を用いた名目書き換え

指導教員 青戸 等人 教授

新潟大学大学院 自然科学研究科 電気情報工学専攻 情報工学コース

芳賀 雅樹

(2022年1月25日提出 / 2022年5月6日加筆修正)

要旨

名目技法 (Gabbay & Pitts, 2002) は項の変数束縛を形式的に取り扱うための枠組みの一つであり, アトム非出現制約や置換といった仕組みを用いて項の α 同値性を特徴付けている. 名目書き換えシステム (Fernández et al., 2004) は名目技法に基づく高い表現力を備えた計算モデルである. 近年, 非出現制約の代わりに置換に関する不動点制約を用いた α 同値性の特徴付けが, (Ayala-Rincón et al., 2020) によって提案されている. 不動点制約を用いた α 同値性は, 名目項の C 単一化に有用であることが知られている一方で, 名目書き換えとの関連性はあまり調べられていない. 本論文では, 不動点制約に関する基本的な性質を示すとともに, 不動点制約を用いた名目書き換えの枠組みを提案する. また, 書き換え規則の一様性に関する性質など, 書き換えの基本的な性質を明らかにする.

Abstract

The nominal-set approach (Gabbay & Pitts, 2002) is one of frameworks that formally treat variable bindings of terms; it characterizes the α -equivalence relation of terms using novel mechanisms such as freshness constraints of atoms and permutations. A nominal rewriting system (Fernández et al., 2004) is a model of computation based on the nominal-set approach with a high expressive power. Recently, an axiomatization of the α -equivalence relation using permutation fixed point constraints in stead of freshness constraints has been proposed by (Ayala-Rincón et al., 2020). While the axiomatization is known to be useful for C-unification of nominal terms, its usability and effectiveness in nominal rewriting have not been well studied. In this thesis, we study fundamental properties of fixed point constraints and propose a framework of nominal rewriting based on fixed point constraints. We moreover clarify basic properties of the proposed framework of nominal rewriting; in particular, we show some properties of the uniformity condition of rewriting rules.

目次

第 1 章	序論	1
1.1	研究の背景と目的	1
1.2	本論文の構成	4
第 2 章	準備	5
2.1	名目項	5
2.2	不動点制約と α 同値性の特徴付け	12
2.3	項の大きさ	15
第 3 章	不動点制約の性質	18
3.1	束縛アトム of の性質	18
3.2	派生規則 ($\hat{\approx}_\alpha \mathbf{ba}$)	27
3.3	α 同値性が同値関係であることの証明	31
第 4 章	不動点制約による名目書き換え	38
4.1	書き換えの定義	38
4.2	非出現制約との関連性	40
4.3	書き換え規則の一様性	42
第 5 章	結論	48
5.1	まとめ	48
5.2	今後の課題	48
	謝辞	50
	参考文献	51

第 1 章

序論

1.1 研究の背景と目的

述語論理や λ 計算のように、ある程度の表現力を持った論理計算を形式的に記述する際には、項の変数束縛の概念が不可欠である。このような項の変数束縛を伴う論理計算を計算機上で実装する際には、普段の議論では暗黙的に扱われることが多い α 同値性を慎重に議論しながら、変数束縛を表現する必要がある。

例 1.1 (変数束縛). 次のような疑似コードを考える。

```
let  $x = 1$   
let  $y = 2$   
let  $f\ y = X + y$ 
```

この疑似コードは、まず変数 x を 1 と定義し、次に変数 y を 2 と定義し、最後に f を、任意の (数値の束縛された) 変数 y を受け取り、何らかの式 X と足し合わせる関数として定義するプログラムを表現したものである。いま、任意の式をおいたメタ変数 X に具体的な式が代入されたとき、関数 f がどのように動作するか考える。 X が $x + 1$ なる式であるとすると、疑似コードは次のようになる。

```
let  $\underline{x} = 1$   
let  $y = 1$   
let  $f\ \underline{y} = \underline{x} + 1 + \underline{y}$ 
```

ここで関数 f は、任意の変数 y を受け取って $x + 1 (= 2)$ を計算し、受け取った y と足し合わせるものとなっており、意図した通りの動作をすることがわかる。一方で X が $y + 1$

なる式であるとする、疑似コードは次のようになる。

$$\begin{aligned} &\text{let } x = 1 \\ &\text{let } \underline{y} = 1 \\ &\text{let } f \underline{y} = \underline{y} + 1 + \underline{y} \end{aligned}$$

このときの f は、任意の変数 y を受け取って $y + 1$ を (上の行で束縛した値を用いずに) 計算し、さらに受け取った y と足し合わせる関数となっており、本来の意図通りではない動作をしてしまう。これを避けるためには、名前の衝突が起きないように α 変換 (変数の適切な名前替え) を行ってから、 X に式を代入すればよい。

$$\begin{aligned} \text{let } f \underline{y} = X + \underline{y} &\longrightarrow_{\alpha} \text{let } f \underline{z} = X + \underline{z} \\ &\longrightarrow_{X:=y+1} \text{let } f \underline{z} = \underline{y} + 1 + \underline{z} \end{aligned}$$

このような項の変数束縛を見通しよく表現するために、具体的な変数名を書かずに抽象の深さを明記する de Bruijn インデックス [1] や、これを局所的に用いるもの [2]、メタ言語の束縛に帰着するもの [3] など、さまざまな手法が考えられている。

例 1.2 (de Bruijn インデックス). 次のような疑似コードを考える。

$$\begin{array}{ll} \text{let } x = 1 & \text{let } 1 \\ \text{in let } y = x + 1 & \text{in let } i_1 + 1 \\ \text{in } x + y + 1 & \text{in } i_2 + i_1 + 1 \end{array}$$

左側の疑似コードは、変数 x が 1 と定義された環境で、さらに変数 y が $x + 1 (= 1 + 1 = 2)$ と定義された環境を用意し、その環境での値 $x + y + 1 (= 1 + 2 + 1 = 4)$ を表すプログラムの断片である。この疑似コードに現れる変数は名前 x, y を用意しなくても、何個上の let で定義された変数かという情報さえあれば、右側の疑似コードのように表現できる。例えば、3 行目の x は 2 つ上の let で定義されているため i_2 と表記している。これは de Bruijn インデックスとよばれる手法である。

名目技法 [4-6] は、項の変数束縛を形式的に取り扱うための枠組みの一つである。この枠組みでは、言語として (メタ言語の) 変数とアトム (対象言語の変数) をそれぞれ導入し、アトムの項に対する非出現制約やアトムの置換といった仕組みを用いて、項の α 同値性を特徴付けている。非出現制約の直感的な意味は、束縛されていない自由な変数としてアトムは項に現れないというものであり、項 t のアトム a に関する非出現制約は $a \# t$ と記述される。名目技法は項の単一化において有用であり、高階項に対する単一化問題が決

定不能であることと対照的に、名目項に対する単一化問題は決定可能であることが知られている [7]. また、名目技法によって α 同値性を扱う手法は、実際に定理証明器のライブラリとして用いられている [8].

名目書き換えシステム [9, 10] は名目技法に基づく計算モデルであり、名目項の高い表現力によって、述語論理や λ 計算を表すことができる. 文献 [10, 11] などでは、書き換えシステムの合流条件や実効的な合流性判定手法が調査されている.

例 1.3 (名目書き換えシステム). 全称量化子と論理積をもつ論理式の冠頭標準形を求める名目書き換えシステム \mathcal{R}_{pnf} を以下に示す.

$$a\#Y \vdash \text{and}(\text{forall}[a]X, Y) \rightarrow \text{forall}[a]\text{and}(X, Y) \quad (\forall_1)$$

$$a\#X \vdash \text{and}(X, \text{forall}[a]Y) \rightarrow \text{forall}[a]\text{and}(X, Y) \quad (\forall_2)$$

(\forall_1) と (\forall_2) は、論理式と同値変形を表現する書き換え規則である. 例えば規則 (\forall_1) は、論理式 Y の中に量化子に束縛されない自由変数としてアトム a が現れないという条件のもとで、次のように論理式と同値変形を行うことができることを意味している.

$$(\forall a.X) \wedge Y \iff \forall a.(X \wedge Y)$$

いま、次のような項 s および項 t を考える.

$$t_1 = \text{and}(\text{forall}[a]\text{or}(p\ a, Z), \text{forall}[a]q\ a)$$

$$t_2 = \text{forall}[a]\text{and}(\text{or}(p\ a, Z), \text{forall}[a]q\ a)$$

$$t_3 = \text{forall}[a]\text{forall}[b]\text{and}(\text{or}(p\ a, Z), q\ b)$$

このとき、書き換えシステム \mathcal{R}_{pnf} は $b\#Z \vdash t_1 \rightarrow_{\forall_1} t_2 \rightarrow_{\forall_2} t_3$ と項を書き換える. この書き換えは、論理式 Z の中に量化子に束縛されない自由変数としてアトム b が現れないという条件のもとでの、次のような論理式と同値変形を意味する.

$$\begin{aligned} (\forall a.(P(a) \vee Z)) \wedge \forall a.Q(a) &\iff \forall a.((P(a) \vee Z) \wedge \forall a.Q(a)) \\ &\iff \forall a.\forall b.((P(a) \vee Z) \wedge Q(b)) \end{aligned}$$

近年、アトムの非出現制約の代わりに項の置換に関する不動点制約を用いた α 同値性の特徴付けが、文献 [12, 13] によって提案されている. 不動点制約の直感的な意味は、項に置換が影響を及ぼしても論理的な意味が変化しないというものであり、項 t の置換 π に関する不動点制約は $\pi \upharpoonright t$ と記述される. 不動点制約を用いた手法は、名目技法を基礎付ける名目論理において、以下が成立することから着想を得たものである [6].

$$a\#x \iff \forall a'.(a\ a') \cdot x = x$$

直感的には、新しく用意したアトム a' に関して、項 x の中でアトム a とアトム a' を入れ替えるような作用は x の意味を変化させないということを右辺は意味している。

不動点制約を用いた名目技法の体系について、文献 [13] では従来の名目技法の体系との関連性が調べられており、項の C 単一化 (可換律を法とした単一化) などに有用であることが知られている。しかしながら、このような名目技法の体系と名目書き換えとの関連性はあまり調べられていない。本論文では、不動点制約に関する基本的な性質を示すとともに、不動点制約を用いた名目書き換の枠組みを提案する。また、提案する名目書き換えが非出現制約に基づく名目書き換の一般化になっており、適切なパラメータを指定することで書き換を模倣できることや、一様性とよばれる書き換規則の条件に関する性質など、書き換の基本的な性質を明らかにする。

1.2 本論文の構成

本論文の構成について説明する。本章では本研究の背景、目的について述べた。第 2 章では次章以降で用いる、置換に関する不動点制約による名目技法の体系について説明する。これは文献 [13] で用いられている体系に相当する。第 3 章では、前章で定義した体系の基本的な性質を明らかにしながら、この体系で特徴付けられる α 同値性が同値関係であることを示す。これは文献 [13] で示されたものと異なり、従来のアトムの非出現制約を用いた体系に依存しない別証明である。第 4 章では、第 2 章の体系における書き換関係を定義し、従来の非出現制約による名目書き換 [11] との関連性や、書き換規則の一様性に関する性質を示す。第 5 章は本論文の結論であり、まとめと今後の課題を記述する。

第2章

準備

本章では，次章以降で用いる名目項，不動点制約， α 同値性の概念やその記法などについて述べる．

2.1 名目項

本節では，名目項を特徴づけるアトムの変換に関して述べるとともに，名目項の定義や名目項に対する作用・代入といった基本的な操作についてまとめる．

定義 2.1 (言語). ある論理を記述するための記号の集合を，その論理の言語とよぶ．名目技法における言語は，以下のものを含む．

- (可算) 無限個のアトム a, b, \dots
- (可算) 無限個の変数 X, Y, \dots
- (可算個の) 関数記号 f, g, \dots

アトムの全体集合と変数の全体集合と関数記号の全体集合は，互いに交わらないものとする．以後， \mathbb{A} をアトムの全体集合， \mathcal{X} を変数の全体集合， Σ を関数記号の全体集合を表す記号として用いる．

定義 2.2 (置換, 台). 全単射 $\pi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ で，集合 $\{a \in \mathbb{A} \mid \pi(a) \neq a\}$ が有限であるものを， \mathbb{A} 上の置換とよぶ． \mathbb{A} 上の置換全体の集合を $\mathbf{Perm}(\mathbb{A})$ と書く．置換 $\pi \in \mathbf{Perm}(\mathbb{A})$ に対して，集合 $\{a \in \mathbb{A} \mid \pi(a) \neq a\}$ を π の台とよび， $\text{supp}(\pi)$ と書く．任意の $a \in \mathbb{A}$ を a 自身に写す置換を \mathbb{A} 上の恒等置換とよび， Id と書く．

補題 2.3. 任意の置換 $\pi, \pi' \in \mathbf{Perm}(\mathbb{A})$ に対して, $\pi' \circ \pi$ は $\mathbf{Perm}(\mathbb{A})$ に含まれる.

(証明). $\pi, \pi' \in \mathbf{Perm}(\mathbb{A})$ とすると π, π' が全単射であることから, $\pi' \circ \pi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ も全単射である. したがって, $\pi' \circ \pi \in \mathbf{Perm}(\mathbb{A})$ となる. \square

以後, 置換の合成記号 \circ は省略する.

定義 2.4 (置換の共役). 置換 π の逆写像を π の逆置換とよび, π^{-1} と書く. また, 置換 $\pi, \pi' \in \mathbf{Perm}(\mathbb{A})$ に対して, 置換 $\pi' \pi \pi'^{-1}$ を π の π' による共役とよび, $\pi^{\pi'}$ と書く.

定義 2.5 (互換). 置換 $\pi \in \mathbf{Perm}(\mathbb{A})$ で, $|\text{supp}(\pi)| = 2$ となるものを, \mathbb{A} 上の互換とよぶ. $\text{supp}(\pi) = \{a, b\}$ なる互換 π を $(a\ b)$ と書く. また, \mathbb{A} 上の互換全体の集合を $\mathbf{Swp}(\mathbb{A})$ と書く.

補題 2.6. 互換 $(a\ b) \in \mathbf{Swp}(\mathbb{A})$ と置換 $\pi \in \mathbf{Perm}(\mathbb{A})$ に対して $(a\ b)^\pi = (\pi(a)\ \pi(b))$ が成立する.

(証明). $(a\ b) \in \mathbf{Swp}(\mathbb{A})$ かつ $\pi \in \mathbf{Perm}(\mathbb{A})$ とすると, $(a\ b)^\pi \pi(a) = \pi(a\ b) \pi^{-1} \pi(a) = \pi(a\ b)(a) = \pi(b)$ が得られる. 同様にして $(a\ b)^\pi \pi(b) = \pi(a)$ も得られる. 一方で, $c \in \mathbb{A}$ を $\pi(a) \neq c \neq \pi(b)$ をみたすアトムとすると, π^{-1} が単射であることから $a \neq \pi^{-1}(c) \neq b$ が得られるので, $(a\ b)^\pi c = \pi(a\ b) \pi^{-1}(c) = \pi \pi^{-1}(c) = c$ となる. 以上より, $(a\ b)^\pi = (\pi(a)\ \pi(b))$ となる. \square

補題 2.7. 置換 $\pi \in \mathbf{Perm}(\mathbb{A})$ が $|\text{supp}(\pi)| = n \geq 2$ をみたすとき, ある $m \leq n$ に対して, $\pi = \rho_m \cdots \rho_1$ となるような互換 $\rho_1, \dots, \rho_m \in \mathbf{Swp}(\mathbb{A})$ が存在する.

(証明). $\pi \in \mathbf{Perm}(\mathbb{A})$ とする. $a \in \text{supp}(\pi)$ とすると $\pi(a) \neq a$ となる. ここで, $a, \pi(a) \in \mathbb{A}$ かつ π が単射であることから, $\pi \pi(a) \neq \pi(a)$ が得られる. また, $\pi^{-1}(a) \in \mathbb{A}$ かつ π^{-1} が単射であることから $\pi^{-1}(a) \neq \pi^{-1} \pi^{-1}(a)$ が得られる. よって $\pi(a), \pi^{-1}(a) \in \text{supp}(\pi)$ となる. このことを用いて, 写像 $\tilde{\pi}: \text{supp}(\pi) \rightarrow \text{supp}(\pi)$ を $\tilde{\pi}(a) = \pi(a)$ と定義する. また, 写像 $\tilde{\pi}': \text{supp}(\pi) \rightarrow \text{supp}(\pi)$ を $\tilde{\pi}'(a) = \pi^{-1}(a)$ と定義する. $a \in \text{supp}(\pi)$ に対して, $\tilde{\pi}' \tilde{\pi}(a) = \pi^{-1} \pi(a) = a$ かつ $\tilde{\pi} \tilde{\pi}'(a) = \pi \pi^{-1}(a) = a$ より, $\tilde{\pi}' = \tilde{\pi}^{-1}$ となる. よって, $\tilde{\pi}$ は全単射である.

このことから, $|\text{supp}(\pi)| = n \geq 2$ とすると, $\tilde{\pi}$ は n 次の対称群 $\text{Sym}(\text{supp}(\pi))$ の要素である. したがって, $\tilde{\pi}$ は互換 $\{\tilde{\rho}_i: \text{supp}(\pi) \rightarrow \text{supp}(\pi)\}_{i=1}^m$ ($m \leq n$) を用いて,

$\tilde{\pi} = \tilde{\rho}_m \cdots \tilde{\rho}_1$ と書ける. すべての i に対し, 互換 $\rho_i \in \mathbf{Swp}(\mathbb{A})$ を以下のように定める.

$$\rho_i(a) = \begin{cases} \tilde{\rho}_i(a) & (a \in \text{supp}(\pi) \text{ のとき}) \\ a & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$\pi = \rho_m \cdots \rho_1$ となることを示す. $a \in \mathbb{A}$ とすると, $a \in \text{supp}(\pi)$ のときは $\rho_m \cdots \rho_1(a) = \tilde{\rho}_m \cdots \tilde{\rho}_1(a) = \tilde{\pi}(a) = \pi(a)$ となる. 一方 $a \notin \text{supp}(\pi)$ のときは $\rho_m \cdots \rho_1(a) = a = \pi(a)$ となる. 以上より, 任意の置換 $\pi \in \mathbf{Perm}(\mathbb{A})$ は, 有限個の互換 $\rho_i \in \mathbf{Swp}(\mathbb{A})$ の合成で書けることが示された. \square

注意 2.8. 補題 2.7 より, 置換は恒等置換と互換を用いて帰納的に定義できる.

1. $Id \in \mathbf{Perm}(\mathbb{A})$.
2. $\pi \in \mathbf{Perm}(\mathbb{A})$ かつ $\rho \in \mathbf{Swp}(\mathbb{A}) \implies \rho\pi \in \mathbf{Perm}(\mathbb{A})$.

よって, 任意の置換はアトム a の対の線形リストの形で表現することができる. 文献 [13] では, このような定義を採用していた.

定義 2.9 (名目項). 名目項を帰納的に定義する.

1. アトム $a \in \mathbb{A}$ は名目項である.
2. 置換 $\pi \in \mathbf{Perm}(\mathbb{A})$ と変数 $X \in \mathcal{X}$ に対して, $\pi \cdot X$ は名目項である.
3. 関数記号 $f \in \mathcal{X}$ と名目項 t に対して, $f t$ は名目項である.
4. 名目項 $\{t_i\}_{i=1}^n$ に対して, (t_1, \dots, t_n) は名目項である.
5. アトム $a \in \mathbb{A}$ と名目項 t に対して, $[a]t$ は名目項である.

2, 3, 4, 5 をそれぞれ, 保留変数, 関数適用, $n(\geq 0)$ 個組, 抽象とよぶ. 0 個組 $()$ が名目項であることに注意する. 保留変数 $Id \cdot X$ および関数適用 $f ()$ は, しばしば X, f と略記する. また, 名目項全体の集合を $\mathbf{Term}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma)$ と書く.

例 2.10 (名目項). $\{a, b\} \subseteq \mathbb{A}$ かつ $Z \in \mathcal{X}$ かつ $\{\text{forall}, \text{and}, \text{or}, p, q\} \subseteq \Sigma$ とすると

$$\text{and} (\text{or} (p a, Z), \text{forall} [b]q b) \in \mathbf{Term}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma)$$

となる. これは, 例 1.3 のような述語論理式の名目項での表現である. また, $\{x, y, f, +\} \subseteq \mathbb{A}$ かつ $X \in \mathcal{X}$ かつ $\{\text{let}, \text{app}, \text{fun}\} \in \Sigma$ とすると

$$\text{let} (f, \text{fun} [y]\text{app} (\text{app} (+, X), y)) \in \mathbf{Term}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma)$$

となる. これは, 例 1.1 における関数 f を定義するプログラムの, 名目項による表現の一例である.

以後、名目項を単に項とよぶ。

定義 2.11. 以下のいずれかをみたすとき、アトム $c \in \mathbb{A}$ は項 $t \in \mathbf{Term}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma)$ に出現しないという。

1. t はアトム a で、 $a \neq c$ をみたす。
2. t は保留変数 $\pi \cdot X$ で、 $c \notin \text{supp}(\pi)$ をみたす。
3. t は関数適用 $f t'$ で、 c は t' に出現しない。
4. t は n 個組 (t_1, \dots, t_n) で、任意の $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して c は t_i に出現しない。
5. t は抽象 $[a]t'$ で、 $a \neq c$ かつ c は t' に出現しない。

定義 2.12 (置換の作用). 項 $t \in \mathbf{Term}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma)$ に対する、置換 $\pi \in \mathbf{Perm}(\mathbb{A})$ による作用 $(\pi, t) \mapsto \pi \cdot t: \mathbf{Perm}(\mathbb{A}) \times \mathbf{Term}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma) \rightarrow \mathbf{Term}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma)$ および共役作用 $(\pi, t) \mapsto t^\pi: \mathbf{Perm}(\mathbb{A}) \times \mathbf{Term}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma) \rightarrow \mathbf{Term}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma)$ を、項の構造にしたがって帰納的に定義する。

$$\begin{array}{ll}
\pi \cdot a = \pi(a) & a^\pi = \pi(a) \\
\pi \cdot (\pi' \cdot X) = \pi\pi' \cdot X & (\pi' \cdot X)^\pi = \pi'^\pi \cdot X \\
\pi \cdot (f t) = f \pi \cdot t & (f t)^\pi = f t^\pi \\
\pi \cdot (t_1, \dots, t_n) = (\pi \cdot t_1, \dots, \pi \cdot t_n) & (t_1, \dots, t_n)^\pi = (t_1^\pi, \dots, t_n^\pi) \\
\pi \cdot ([a]t) = [\pi(a)](\pi \cdot t) & ([a]t)^\pi = [\pi(a)](t^\pi)
\end{array}$$

例 2.13 (置換の作用). $\{a, b\} \subseteq \mathbb{A}$ かつ $\{X, Y\} \subseteq \mathcal{X}$ かつ $\{\text{and}, \text{forall}\} \in \Sigma$ とする。このとき、 $\text{and}(X, \text{forall}[a]Y)$ なる項に対して、互換 $(a b)$ は次のように作用する。

$$\begin{aligned}
(a b) \cdot \text{and}(X, \text{forall}[a]Y) &= \text{and}(a b) \cdot (X, \text{forall}[a]Y) \\
&= \text{and}((a b) \cdot X, (a b) \cdot \text{forall}[a]Y) \\
&= \text{and}((a b) \cdot X, \text{forall}(a b) \cdot [a]Y) \\
&= \text{and}((a b) \cdot X, \text{forall}[b](a b) \cdot Y).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{and}(X, \text{forall}[a]Y))^{(a b)} &= \text{and}((X, \text{forall}[a]Y)^{(a b)}) \\
&= \text{and}((a b)Id(a b) \cdot X, (\text{forall}[a]Y)^{(a b)}) \\
&= \text{and}(X, \text{forall}([a]Y)^{(a b)}) \\
&= \text{and}(X, \text{forall}[b](a b)Id(a b) \cdot Y) \\
&= \text{and}(X, \text{forall}[b]Y).
\end{aligned}$$

定義 2.14 (代入). 写像 $\sigma: \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{Term}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma)$ で、集合 $\{X \mid \sigma(X) \neq Id \cdot X\}$ が有

限であるものを代入とよぶ. このとき, 集合 $\{X \mid \sigma(X) \neq Id \cdot X\}$ を σ の定義域とよび, $\text{dom}(\sigma)$ と書く. $\text{dom}(\sigma) = \emptyset$ となるような代入 σ を恒等代入とよび, id と書く. $\text{dom}(\sigma) = \{X_i\}_{i=1}^n$ となるような代入 σ は, $\{X_1 := \sigma(X_1), \dots, X_n := \sigma(X_n)\}$ と書く. また, 代入全体の集合は $\mathbf{Sub}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma)$ と書く.

注意 2.15. 任意の代入は, 項 $Id \cdot X$ を項 t に写し, それ以外の項は変化させないような写像 $[X \mapsto t]: \mathbf{Term}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma) \rightarrow \mathbf{Term}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma)$ を用いて, 帰納的に定義できる.

1. $id \in \mathbf{Sub}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma)$.
2. $\sigma \in \mathbf{Sub}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma)$ かつ $X \in \mathcal{X}$ かつ $t \in \mathbf{Term}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma)$
 $\implies [X \mapsto t] \circ \sigma \in \mathbf{Sub}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma)$.

文献 [13] では, このような定義を採用していた. 実際, 任意の代入 $\{X_1 := t_1, \dots, X_n := t_n\}$ を, 変数 X_i ではなく項 $Id \cdot X_i$ を t_i へ写す写像と見ることで始域を $\mathbf{Term}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma)$ に拡張すると, $\{X_1 := t_1, \dots, X_n := t_n\}$ は新しい変数 Y を用いて $[Y \mapsto t_n] \circ \{X_1 := t_1, \dots, X_{n-1} := t_{n-1}\} \circ [X_n \mapsto Y]$ と書くことができる. 以後, 代入 $[X \mapsto t] \circ id$ は単に $[X \mapsto t]$ と書き, 合成記号 \circ は省略する.

定義 2.16 (項への代入). 項 $t \in \mathbf{Term}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma)$ への代入 $\sigma \in \mathbf{Sub}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma)$ の適用 $(t, \sigma) \mapsto t\sigma: \mathbf{Term}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma) \times \mathbf{Sub}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma) \rightarrow \mathbf{Term}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma)$ を, 項の構造にしたがって帰納的に定義する.

$$\begin{aligned}
a\sigma &= a \\
(\pi \cdot X)\sigma &= \pi \cdot \sigma(X) \\
(f t)\sigma &= f (t\sigma) \\
(t_1, \dots, t_n)\sigma &= (t_1\sigma, \dots, t_n\sigma) \\
([a]t)\sigma &= [a](t\sigma)
\end{aligned}$$

例 2.17 (項への代入). $\sigma = [X \mapsto \text{or} (p a, Z)][Y \mapsto \text{forall} [a]q a]$ とする. このとき, 項 $\text{and} (\text{forall} [a]X, Y)$ に代入 σ の適用して得られる項は, 以下のようにして求められる.

$$\begin{aligned}
(\text{and} (\text{forall} [a]X, Y))\sigma &= \text{and} ((\text{forall} [a]X, Y))\sigma \\
&= \text{and} ((\text{forall} [a]X)\sigma, \sigma(Y)) \\
&= \text{and} (\text{forall} ([a]X)\sigma, \text{forall} [a]q a) \\
&= \text{and} (\text{forall} [a]\sigma(X), \text{forall} [a]q a) \\
&= \text{and} (\text{forall} [a]\text{or} (p a, Z), \text{forall} [a]q a).
\end{aligned}$$

置換による作用と代入は、以下のように可換である。このことは、項 t の構造に関する帰納法によって容易に示される。

命題 2.18 ([7, Lemma 2.14] 作用と代入の可換性). 項 $t \in \mathbf{Term}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma)$ と置換 $\pi \in \mathbf{Perm}(\mathbb{A})$ と代入 $\sigma \in \mathbf{Sub}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma)$ に対して $\pi \cdot (t\sigma) = (\pi \cdot t)\sigma$.

この命題の結果を用いて、 $\pi \cdot t\sigma$ のように括弧をしばしば省略する。

注意 2.19. 共役作用と代入は可換ではない。例えば、項 X と互換 $(a\ b)$ と代入 $[X \mapsto a]$ に対して、 $X^{(a\ b)}[X \mapsto a] = ((a\ b)Id(a\ b) \cdot X)[X \mapsto a] = X[X \mapsto a] = a$ となるが、一方で $(X[X \mapsto a])^{(a\ b)} = a^{(a\ b)} = (a\ b)(a) = b$ より、 $X^{(a\ b)}[X \mapsto a] \neq (X[X \mapsto a])^{(a\ b)}$ となる。

定義 2.20 (位置, 部分項). 有限文字列の集合 \mathbb{N}_+^* を帰納的に定義する。

1. $\varepsilon \in \mathbb{N}_+^*$.
2. $w \in \mathbb{N}_+^*$ かつ $n \in \mathbb{N}_+ \implies n.w \in \mathbb{N}_+^*$.

文字列 $w.\varepsilon \in \mathbb{N}_+^*$ は単に w と書く。このとき、項 t の位置の集合 $\mathbf{Pos}(t) \subseteq \mathbb{N}_+^*$ を、項の構造にしたがって帰納的に定義する。

$$\begin{aligned} \mathbf{Pos}(a) &= \mathbf{Pos}(\pi \cdot X) = \{\varepsilon\} \\ \mathbf{Pos}(f\ t) &= \mathbf{Pos}([a]t) = \{1.p \mid p \in \mathbf{Pos}(t)\} \cup \{\varepsilon\} \\ \mathbf{Pos}((t_1, \dots, t_n)) &= \bigcup_{i=1, \dots, n} \{i.p \mid p \in \mathbf{Pos}(t_i)\} \cup \{\varepsilon\} \end{aligned}$$

また、項 $t \in \mathbf{Term}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma)$ の位置 $p \in \mathbf{Pos}(t)$ の部分項 $t|_p \in \mathbf{Term}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma)$ も、項の構造にしたがって帰納的に定義する。

$$\begin{aligned} t|_\varepsilon &= t \\ (f\ t)|_{1.p} &= ([a]t)|_{1.p} = t|_p \\ (t_1, \dots, t_i, \dots, t_n)|_{i.p} &= t_i|_p \end{aligned}$$

例 2.21 (位置, 部分項). 項 $t := \text{and}(\text{or}(p\ a, Z), \text{forall}[b]q\ b)$ に対して、位置の集合は

$$\mathbf{Pos}(t) = \{\varepsilon, 1, 1.1, 1.1.1, 1.1.1.1, 1.1.1.1.1, 1.1.1.1.2, 1.2, 1.2.1, 1.2.1.1, 1.2.1.1.1\}$$

となる。また、項 t の位置 $1.1 \in \mathbf{Pos}(t)$ の部分項 $t|_{1.1}$ は

$$\begin{aligned} (\text{and}(\text{or}(p\ a, Z), \text{forall}[b]q\ b))|_{1.1} &= (\text{or}(p\ a, Z), \text{forall}[b]q\ b)|_1 \\ &= (\text{or}(p\ a, Z))|_\varepsilon = \text{or}(p\ a, Z) \end{aligned}$$

となる. 図 2.1 の 2 つの木は, 左からそれぞれ, 項 t とその部分項 $t|_{1.1}$ を木の形で表したものである. また, 項における記号の位置を添字として明記している. 項の位置は, 上

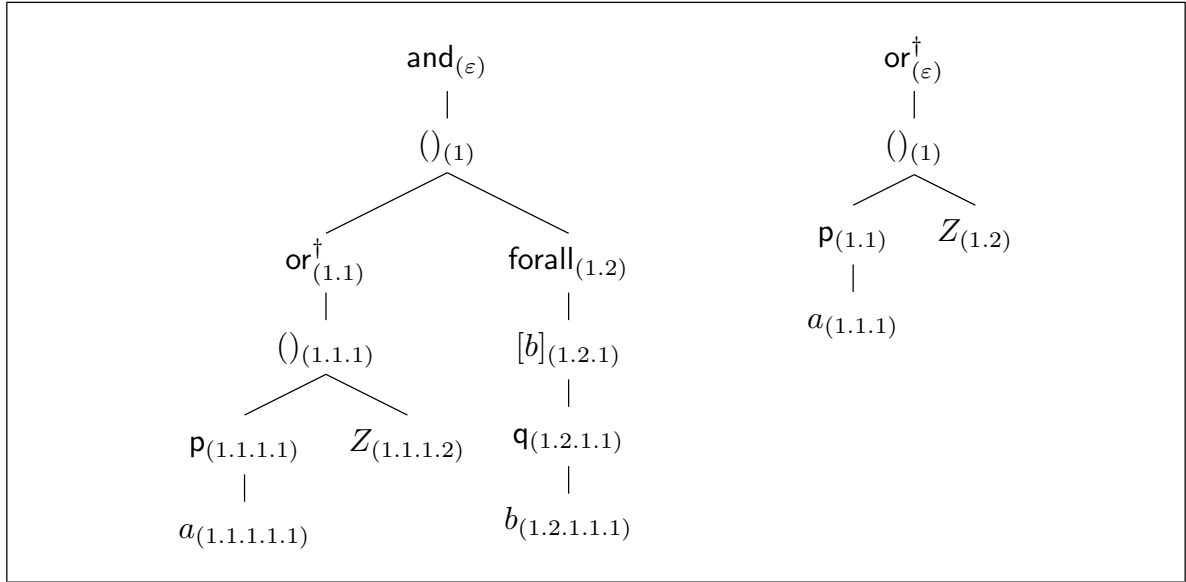


図 2.1 項の位置と部分項

から下に木をたどっていったときに, 節点の記号が左から何番目かを表している. $\text{Pos}(t)$ は t の節点の添字の集合と一致している. また, $t|_{1.1}$ を表現した木は, t を表現した木の位置 1.1 から下の部分を抜き出したものになっている.

定義 2.22 (文脈). 特別な定数記号 $\square \notin \Sigma \cup \mathcal{X} \cup \mathbb{A}$ を用いて, $\mathbf{Term}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma)$ 上の文脈を帰納的に定義する.

1. \square は文脈である.
2. アトム $a \in \mathbb{A} \subseteq \mathbf{Term}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma)$ は文脈である.
3. 保留変数 $\pi \cdot X \in \mathbf{Term}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma)$ は文脈である.
4. 関数記号 $f \in \Sigma$ と文脈 C に対して, $f C$ は文脈である.
5. $n (\geq 0)$ 個の文脈 C_1, \dots, C_n に対して, (C_1, \dots, C_n) は文脈である.
6. アトム $a \in \mathbb{A}$ と文脈 C に対して, $[a]C$ は文脈である.

文脈 C の位置 p_i の \square を項 t_i に置き換えて得られる項を $C[t_1, \dots, t_n]_{p_1, \dots, p_n}$ と書く. \square の位置 p_1, \dots, p_n はしばしば省略する. また, 項 s の位置 p_i の部分項 $s|_{p_i}$ を別の項 t_i で置き換えて得られる項を $s[t_1, \dots, t_n]_{p_1, \dots, p_n}$ と書く.

例 2.23 (文脈). $C := \text{and}(\text{or}(\text{p } a, Z), \square)$ は文脈である. また, $t' := [b]q b$ なる項を考えると, 項 $C[t']_{1.2.1}$ は例 2.21 における項 t と一致する. 図 2.2 は, 左からそれぞれ文脈 C と項 t' を表したものである. C を表す木の位置 1.2.1 の \square を t' を表す木で置き換えると, 図 2.1 における項 t を表す木と一致する.

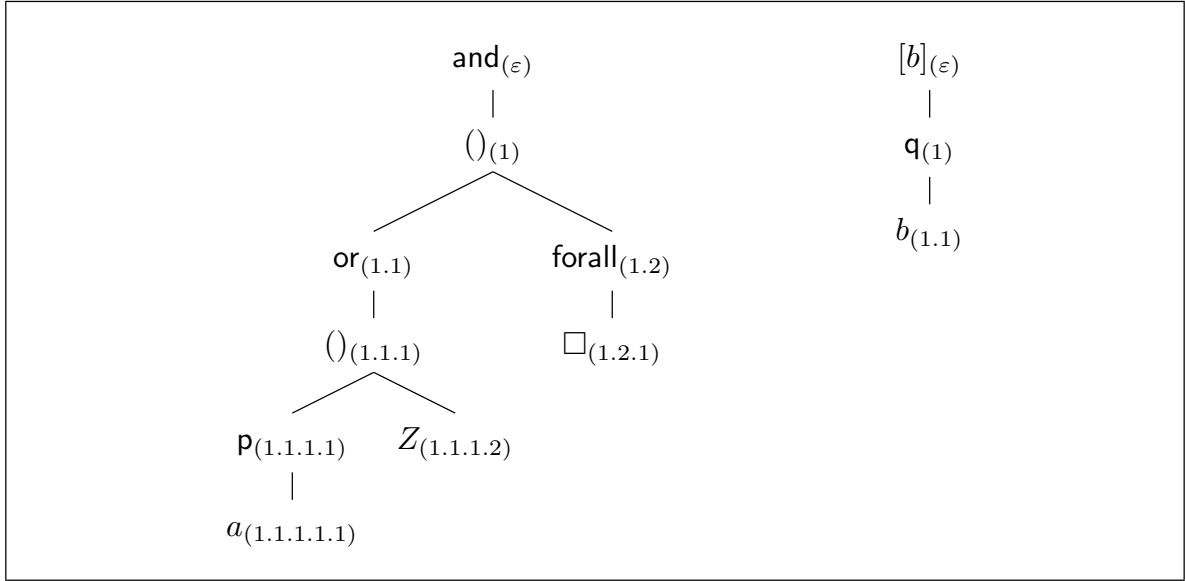


図 2.2 文脈の例

2.2 不動点制約と α 同値性の特徴付け

本節では, 文献 [13] にしたがって不動点制約を用いた名目項の α 同値性を定義する.

定義 2.24 (不動点制約, 等式). 置換 $\pi \in \mathbf{Perm}(\mathbb{A})$ と項 $t \in \mathbf{Term}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma)$ の組 $\pi \wedge t$ を不動点制約とよぶ. 不動点制約の集合 Υ と代入 σ に対して, $\Upsilon\sigma = \{\pi \wedge t\sigma \mid \pi \wedge t \in \Upsilon\}$ と定める. 項 $s, t \in \mathbf{Term}(\mathbb{A}, \mathcal{X}, \Sigma)$ の対 $s \overset{\wedge}{\approx}_{\alpha} t$ を (α 同値性に関する) 等式とよぶ.

定義 2.25 (基本不動点制約, 不動点環境). 恒等置換 Id による保留変数 X に対して, 不動点制約 $\pi \wedge X$ を基本不動点制約とよぶ. 基本不動点制約の集合を不動点環境とよぶ. 不動点環境 Υ と置換 π に対して, $\Upsilon^{\pi} = \{\pi_0^{\pi} \wedge X \mid \pi_0 \wedge X \in \Upsilon\}$ と定める. また, 不動点環境 Υ と変数 X に対して, $\text{perm}(\Upsilon|_X) = \{\pi \mid \pi \wedge X \in \Upsilon\}$ と定める. さらに, 置換の集合 Π に対して $\text{supp}(\Pi) = \bigcup_{\pi \in \Pi} \text{supp}(\pi)$ と定義を拡張する.

不動点制約 $\pi \wedge t$ の直感的な意味は、置換 π の項 t への作用が対象言語の変数束縛に効果を及ぼさないというものである。また、等式 $s \overset{\wedge}{\approx}_\alpha t$ の直感的な意味は、項 s と項 t の変数束縛が対象言語レベルで等しいというものである。これらは次のように定義される。以後、 c_1, \dots, c_n といったアトム の有限列を \bar{c} のように略記する。

定義 2.26 (不動点制約と α 同値性の導出). 不動点環境 Υ のもとで新たなアトム \bar{c} に対して、不動点制約 $\pi \wedge t$ が成立することを $\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}. \pi \wedge t$ と書く。これは図 2.3 の推論規則で与えられる。また、不動点環境 Υ のもとで新たなアトムの列 \bar{c} に対して、項 s と項 t が α 同値であることを $\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}. s \overset{\wedge}{\approx}_\alpha t$ と書く。これは図 2.4 の推論規則で与えられる。推論規則は 0 個以上の上式 (仮定) と 1 つの下式 (結論) からなり、すべての仮定が成立

$$\begin{array}{c}
\frac{\pi(a) = a}{\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}. \pi \wedge a} \quad (\wedge \mathbf{a}) \qquad \frac{\text{supp}(\pi^{\pi'^{-1}}) \setminus \{\bar{c}\} \subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon|_X))}{\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}. \pi \wedge \pi' \cdot X} \quad (\wedge \mathbf{var}) \\
\frac{\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}. \pi \wedge t}{\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}. \pi \wedge f t} \quad (\wedge \mathbf{f}) \qquad \frac{\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}. \pi \wedge t_1 \quad \dots \quad \Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}. \pi \wedge t_n}{\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}. \pi \wedge (t_1, \dots, t_n)} \quad (\wedge \mathbf{tup}) \\
\frac{\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}, c_1. \pi \wedge (a c_1) \cdot t}{\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}. \pi \wedge [a]t} \quad (\wedge \mathbf{abs})
\end{array}$$

図 2.3 不動点制約の推論規則

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}. a \overset{\wedge}{\approx}_\alpha a} \quad (\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{a}) \qquad \frac{\text{supp}((\pi')^{-1}\pi) \setminus \{\bar{c}\} \subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon|_X))}{\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}. \pi \cdot X \overset{\wedge}{\approx}_\alpha \pi' \cdot X} \quad (\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{var}) \\
\frac{\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}. s \overset{\wedge}{\approx}_\alpha t}{\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}. f s \overset{\wedge}{\approx}_\alpha f t} \quad (\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{f}) \qquad \frac{\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}. s_1 \overset{\wedge}{\approx}_\alpha t_1 \quad \dots \quad \Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}. s_n \overset{\wedge}{\approx}_\alpha t_n}{\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}. (s_1, \dots, s_n) \overset{\wedge}{\approx}_\alpha (t_1, \dots, t_n)} \quad (\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{tup}) \\
\frac{\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}. s \overset{\wedge}{\approx}_\alpha t}{\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}. [a]s \overset{\wedge}{\approx}_\alpha [a]t} \quad (\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{[a]}) \qquad \frac{\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}. s \overset{\wedge}{\approx}_\alpha (a b) \cdot t \quad \Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}, c_1. (a c_1) \wedge t}{\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}. [a]s \overset{\wedge}{\approx}_\alpha [b]t} \quad (\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ab})
\end{array}$$

図 2.4 α 同値性の推論規則

するときに結論が成立することを表している。ここで \bar{c} を (量子子 \mathbb{I} による) 束縛アトム

$$\frac{\frac{\frac{(b\ c)(a) = a}{(b\ c') \wedge Z \vdash \mathcal{I}c. (b\ c) \wedge a}}{(b\ c') \wedge Z \vdash \mathcal{I}c. (b\ c) \wedge \mathbf{p}\ a} \quad \frac{\{b, c\} \setminus \{c\} \subseteq \{b, c'\}}{(b\ c') \wedge Z \vdash \mathcal{I}c. (b\ c) \wedge Z}}{(b\ c') \wedge Z \vdash \mathcal{I}c. (b\ c) \wedge (\mathbf{p}\ a, Z)} \\
\frac{}{(b\ c') \wedge Z \vdash \mathcal{I}c. (b\ c) \wedge \mathbf{or}\ (\mathbf{p}\ a, Z)}$$

図 2.5 不動点制約の導出例

とよぶ. $(\wedge \mathbf{abs})$ や $(\hat{\approx}_\alpha \mathbf{ab})$ における束縛アトム c_1 は, 規則の結論に含まれる任意の置換 π や任意の項 t や任意の束縛アトム c に関して, $c_1 \notin \text{supp}(\pi)$ かつ $c_1 \neq c$ で t に出現しないものを指す. 不動点環境は波括弧を省略して書く. また, 空集合の不動点環境や, 束縛アトムが 0 個の \mathcal{I} は書かない. Φ を不動点制約 $\pi \wedge t$ や等式 $s \hat{\approx}_\alpha t$ を含む集合や列とするとき, 任意の $\varphi \in \Phi$ に対して $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \varphi$ となることを, しばしば $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \Phi$ と略記する.

注意 2.27. 推論規則 $(\wedge \mathbf{var})$ の仮定は, 置換 $\pi^{\pi'^{-1}}$ が \bar{c} 以外のあるアトムを変化させるとき, $\text{perm}(\Upsilon|_X)$ に含まれるいずれかの置換もこのアトムを変化させることを意味している. すなわち, $\pi^{\pi'^{-1}}$ は \bar{c} を除いて X に代入されうる項を変化させない. $(\hat{\approx}_\alpha \mathbf{var})$ の仮定も, 同様のことを意味している.

例 2.28 (不動点制約と α 同値性の導出). 図 2.5 の導出木より

$$(b\ c') \wedge Z \vdash \mathcal{I}c. (b\ c) \wedge \mathbf{or}\ (\mathbf{p}\ a, Z)$$

が成立する. また, 図 2.6 の導出木より

$$\vdash \mathbf{and}\ (\mathbf{or}\ (\mathbf{p}\ a, Z), \mathbf{forall}\ [a]q\ a) \hat{\approx}_\alpha \mathbf{and}\ (\mathbf{or}\ (\mathbf{p}\ a, Z), \mathbf{forall}\ [b]q\ b)$$

が成立する.

推論規則 $(\wedge \mathbf{var})$ および $(\hat{\approx}_\alpha \mathbf{var})$ の形から, 明らかに次の命題が成立する.

命題 2.29 ([13, Corollary 3.14] 仮定の弱化). $\Upsilon' \subseteq \Upsilon$ とすると以下が成立する.

- (A) $\Upsilon' \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \pi \wedge t \implies \Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \pi \wedge t.$
- (B) $\Upsilon' \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s \hat{\approx}_\alpha t \implies \Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s \hat{\approx}_\alpha t.$

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\vdash a \overset{\wedge}{\approx}_\alpha a} \quad \frac{\emptyset \subseteq \emptyset}{\vdash Z \overset{\wedge}{\approx}_\alpha Z} \quad \frac{}{\vdash a \overset{\wedge}{\approx}_\alpha a} \quad \frac{(a c_1)(b) = b}{\vdash \forall c_1. (a c_1) \wedge b} \\
\hline
\frac{}{\vdash p a \overset{\wedge}{\approx}_\alpha p a} \quad \frac{}{\vdash q a \overset{\wedge}{\approx}_\alpha q a} \quad \frac{}{\vdash \forall c_1. (a c_1) \wedge q b} \\
\hline
\frac{}{\vdash (p a, Z) \overset{\wedge}{\approx}_\alpha (p a, Z)} \quad \frac{}{\vdash [a]q a \overset{\wedge}{\approx}_\alpha [b]q b} \\
\hline
\frac{}{\vdash \text{or } (p a, Z) \overset{\wedge}{\approx}_\alpha \text{or } (p a, Z)} \quad \frac{}{\vdash \text{forall } [a]q a \overset{\wedge}{\approx}_\alpha \text{forall } [b]q b} \\
\hline
\frac{}{\vdash (\text{or } (p a, Z), \text{forall } [a]q a) \overset{\wedge}{\approx}_\alpha (\text{or } (p a, Z), \text{forall } [b]q b)} \\
\hline
\vdash \text{and } (\text{or } (p a, Z), \text{forall } [a]q a) \overset{\wedge}{\approx}_\alpha \text{and } (\text{or } (p a, Z), \text{forall } [b]q b)
\end{array}$$

図 2.6 α 同値性の導出例

注意 2.30. 名目項の構造から, $(\lambda \mathbf{abs})$ および $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ab})$ 以外の推論規則に対して, 結論が成立するならば全ての仮定が成立することがわかる. しかしながら, $(\lambda \mathbf{abs})$ や $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ab})$ に関して, このことは非自明である. 例えば $(\lambda \mathbf{abs})$ において, 結論に出現しないあらゆるアトム c_1 に対してこの導出は行われる. 一方で, 結論の情報からはこれらのうちどのアトムを用いて導出が行われたのかわからない. 次章では, \forall で束縛されたアトムに関する性質を議論するとともに, このことを明らかにする.

2.3 項の大きさ

本節では, 次章以降の証明で用いる名目項の大きさとその性質について述べる.

定義 2.31 (項の大きさ). 項 t の大きさ $\text{size}(t) \in \mathbb{N}_+$ を帰納的に定義する.

- $\text{size}(a) = \text{size}(\pi \cdot X) = 1$
- $\text{size}(f t') = \text{size}([a]t') = 1 + \text{size}(t')$
- $\text{size}((t_1, \dots, t_n)) = 1 + \sum_i (\text{size}(t_i))$

例 2.32 (項の大きさ). 例 2.21 における項 t に対して, 項の大きさ $\text{size}(t)$ は次のように

求められる.

$$\begin{aligned}
\text{size}(\text{and}(\text{or}(\text{p } a, Z), \text{forall } [a]\text{q } a)) &= 1 + \text{size}((\text{or}(\text{p } a, Z), \text{forall } [a]\text{q } a)) \\
&= 2 + \text{size}(\text{or}(\text{p } a, Z)) + \text{size}(\text{forall } [a]\text{q } a) \\
&= 3 + \text{size}((\text{p } a, Z)) + 1 + \text{size}([a]\text{q } a) \\
&= 4 + \text{size}(\text{p } a) + \text{size}(Z) + 2 + \text{size}(\text{q } a) \\
&= 5 + \text{size}(a) + 4 + \text{size}(a) = 11.
\end{aligned}$$

$\text{size}(t)$ は $|\text{Pos}(t)|$ と一致する. 実際に, 図 2.1 の t を表す木を観察すると, 節点の個数は 11 となっている.

補題 2.33. 項 t と置換 π に対して $\text{size}(\pi \cdot t) = \text{size}(t)$.

(証明). 項 t の構造に関する帰納法で示す.

t がアトム a のとき, $\text{size}(\pi \cdot a) = \text{size}(\pi(a)) = 1 = \text{size}(a)$ となるのでよい.

t が保留変数 $\pi' \cdot X$ のとき,

$$\begin{aligned}
\text{size}(\pi \cdot (\pi' \cdot X)) &= \text{size}(\pi\pi' \cdot X) \\
&= 1 = \text{size}(\pi' \cdot X)
\end{aligned}$$

となるのでよい.

t が関数適用 $f t'$ のとき, 帰納法の仮定より $\text{size}(\pi \cdot t') = \text{size}(t')$ をみたます. よって

$$\begin{aligned}
\text{size}(\pi \cdot (f t')) &= \text{size}(f \pi \cdot t') \\
&= 1 + \text{size}(\pi \cdot t') \\
&= 1 + \text{size}(t') = \text{size}(f t')
\end{aligned}$$

となるのでよい.

t が抽象 $[a]t'$ のとき, 帰納法の仮定より $\text{size}(\pi \cdot t') = \text{size}(t')$ をみたます. よって

$$\begin{aligned}
\text{size}(\pi \cdot ([a]t')) &= \text{size}([\pi(a)]\pi \cdot t') \\
&= 1 + \text{size}(\pi \cdot t') \\
&= 1 + \text{size}(t') = \text{size}([a]t')
\end{aligned}$$

となるのでよい.

t が n 個組 (t_1, \dots, t_n) のとき, 帰納法の仮定より, 任意の $1 \leq i \leq n$ に対して

$\text{size}(\pi \cdot t_i) = \text{size}(t_i)$ をみたす. よって

$$\begin{aligned} \text{size}(\pi \cdot (t_1, \dots, t_n)) &= \text{size}((\pi \cdot t_1, \dots, \pi \cdot t_n)) \\ &= 1 + \sum_i (\text{size}(\pi \cdot t_i)) \\ &= 1 + \sum_i (\text{size}(t_i)) = \text{size}((t_1, \dots, t_n)) \end{aligned}$$

となるのでよい. □

補題 2.34. $\Upsilon \vdash \mathcal{V}\bar{c}. s \overset{\wedge}{\approx}_\alpha t \implies \text{size}(s) = \text{size}(t).$

(証明). 仮定 $\Upsilon \vdash \mathcal{V}\bar{c}. s \overset{\wedge}{\approx}_\alpha t$ の導出に関する帰納法で示す.

仮定が $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{a})$ によって導出されているとき, s, t は同じアトム a である. 同じ項なので大きさも明らかに等しい.

仮定が $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{var})$ によって導出されているとき, s, t は同じ変数 X に関する保留変数 $\pi \cdot X, \pi' \cdot X$ である. よって $\text{size}(\pi \cdot X) = 1 = \text{size}(\pi' \cdot X)$ となる.

仮定が $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{tup})$ によって導出されているとき, s, t は n 個組 $(s_1, \dots, s_n), (t_1, \dots, t_n)$ である. 帰納法の仮定より, 任意の $1 \leq i \leq n$ に対して $\text{size}(s_i) = \text{size}(t_i)$ が成立するので,

$$\begin{aligned} \text{size}((s_1, \dots, s_n)) &= 1 + \sum_i (\text{size}(s_i)) \\ &= 1 + \sum_i (\text{size}(t_i)) = \text{size}((t_1, \dots, t_n)) \end{aligned}$$

となる.

仮定が $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ab})$ によって導出されているとき, s, t は抽象 $[a]s', [b]t'$ である. 帰納法の仮定および補題 2.33 より, $\text{size}(s') = \text{size}((a \ b) \cdot t') = \text{size}(t')$ をみたすので,

$$\text{size}([a]s') = 1 + \text{size}(s') = 1 + \text{size}(t') = \text{size}([b]t')$$

となる.

そのほかの推論規則によって導出されている場合も, 帰納法の仮定を用いて容易に示される. □

第3章

不動点制約の性質

本章では、第2章で定義した不動点制約や α 同値性の性質について詳細に議論し、基本的な性質を明らかにしていく。さらに、それらの性質を用いながら、 α 同値性が同値関係であることについて文献 [13] とは別の証明を与える。

3.1 束縛アトム of の性質

本節では、束縛アトムの性質、特に推論規則 $(\lambda \mathbf{abs})$ および $(\hat{\approx}_\alpha \mathbf{ab})$ におけるアトム c_1 の名前替えの妥当性について議論する。これにより、文献 [13] での議論をより正確に行うことができる。

補題 3.1 (束縛アトムの交換). $\bar{c} := \bar{c}_l, c_i, c_j, \bar{c}_r$ および $\bar{c}' := \bar{c}_l, c_j, c_i, \bar{c}_r$ とする。このとき、以下の命題が成立する。

- (A) $\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}. \pi \lambda t \implies \Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}'. \pi \lambda t.$
- (B) $\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}. s \hat{\approx}_\alpha t \implies \Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}'. s \hat{\approx}_\alpha t.$

(証明). (A) 仮定 $\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}. \pi \lambda t$ の導出に関する帰納法で示す。

仮定が $(\lambda \mathbf{a})$ によって導出されているとき、 t はアトム a で $\pi(a) = a$ をみたしている。 $\bar{c} := \bar{c}'$ として $(\lambda \mathbf{a})$ を用いると結論が得られる。

仮定が $(\lambda \mathbf{var})$ によって導出されているとき、 t は保留変数 $\pi' \cdot X$ で

$$\text{supp}(\pi^{\pi'^{-1}}) \setminus \{\bar{c}\} \subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon|_X))$$

をみたしている。 $\{\bar{c}\} = \{\bar{c}'\}$ より

$$\text{supp}(\pi^{\pi'^{-1}}) \setminus \{\bar{c}'\} \subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon|_X))$$

となるので, $(\wedge \mathbf{var})$ を用いると結論が得られる.

そのほかの推論規則によって導出されている場合は, 帰納法の仮定を用いて容易に示される.

(B) 仮定 $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s \overset{\wedge}{\approx}_\alpha t$ の導出に関する帰納法で示す.

仮定が $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{a})$ によって導出されているとき, s, t は同じアトム a である. $\bar{c} := \bar{c}'$ として $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{a})$ を用いると結論が得られる.

仮定が $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{var})$ によって導出されているとき, s, t は同じ変数 X に関する保留変数 $\pi \cdot X$ および $\pi' \cdot X$ であり,

$$\text{supp}((\pi')^{-1}\pi) \setminus \{\bar{c}\} \subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon|_X))$$

をみます. $\{\bar{c}\} = \{\bar{c}'\}$ より

$$\text{supp}((\pi')^{-1}\pi) \setminus \{\bar{c}'\} \subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon|_X))$$

となるので, $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{var})$ を用いると結論が得られる.

仮定が $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ab})$ によって導出されているとき, s, t は抽象 $[a]s', [b]t'$ ($b \neq a$) であり, 仮定に出現しないあるアトム c_1 に関して

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s' \overset{\wedge}{\approx}_\alpha (a b) \cdot t' \quad (3.1)$$

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. (a c_1) \wedge t' \quad (3.2)$$

をみます. (3.1) と帰納法の仮定より

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}'. s' \overset{\wedge}{\approx}_\alpha (a b) \cdot t'$$

で, (3.2) と (A) より

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}', c_1. (a c_1) \wedge t'$$

となるので, $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ab})$ を用いると結論が得られる.

そのほかの推論規則によって導出されている場合は, 帰納法の仮定を用いて容易に示される. \square

以後, この補題を用いて束縛アトム同士の入れ替えを断りなく行う場合がある.

補題 3.2 (束縛アトムの縮約). $\bar{c} := \bar{c}_l, c_i, c_i, \bar{c}_r$ および $\bar{c}' := \bar{c}_l, c_i, \bar{c}_r$ とする. このとき, 以下の命題が成立する.

$$(A) \Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \pi \wedge t \implies \Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}'. \pi \wedge t.$$

$$(B) \Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s \overset{\wedge}{\approx}_\alpha t \implies \Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}'. s \overset{\wedge}{\approx}_\alpha t.$$

(証明). 補題 3.1 の証明と同様の議論をすればよい. □

注意 3.3. 補題 3.1 と補題 3.2 より, 束縛アトム の列は単なる集合とみなすことができる.

補題 3.4 (束縛アトム の削除). $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. \pi \wedge t \implies \Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \pi \wedge t$ が成立する. ただし c_1 は t に出現しないアトムで $c_1 \notin \text{supp}(\pi)$ をみたすものとする.

(証明). 仮定 $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. \pi \wedge t$ の導出に関する帰納法で示す.

仮定が $(\wedge \mathbf{a})$ によって導出されているとき, t はアトム a で $\pi(a) = a$ をみたしている. $\bar{c} := \bar{c}$ として $(\wedge \mathbf{a})$ を用いることで, 直ちに結論が得られる.

仮定が $(\wedge \mathbf{var})$ によって導出されているとき, t は保留変数 $\pi' \cdot X$ で

$$\text{supp}(\pi^{\pi'^{-1}}) \setminus \{\bar{c}, c_1\} \subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon|_X))$$

をみたしている. ここでアトム c_1 は $c_1 \notin \text{supp}(\pi)$ かつ $c_1 \notin \text{supp}(\pi')$ より $c_1 \notin \text{supp}(\pi^{\pi'^{-1}})$ をみたす. よって

$$\text{supp}(\pi^{\pi'^{-1}}) \setminus \{\bar{c}\} = \text{supp}(\pi^{\pi'^{-1}}) \setminus \{\bar{c}, c_1\} \subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon|_X))$$

が得られ, 推論規則 $(\wedge \mathbf{var})$ によって結論が導かれる.

そのほかの推論規則によって導出されている場合は, 帰納法の仮定を用いて容易に示される. □

補題 3.5. $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. \pi \wedge t \implies \Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1, c_2. \pi \wedge (c_1 c_2) \cdot t$ が成立する. ただし c_2 は t に出現しないアトムで $c_1, c_2 \notin \text{supp}(\pi) \cup \{\bar{c}\}$ をみたすものとする.

(証明). 仮定 $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. \pi \wedge t$ の導出に関する帰納法で示す.

仮定が $(\wedge \mathbf{a})$ によって導出されているとき, t はアトム a で $\pi(a) = a$ をみたしている. $c_1 = a$ とすると $(c_1 c_2) \cdot a = c_2$ であるから, $c_2 \notin \text{supp}(\pi)$ より

$$\pi((c_1 c_2) \cdot a) = \pi(c_2) = c_2 = (c_1 c_2) \cdot a$$

となる. 一方で $c_1 \neq a$ とすると $c_2 \neq a$ より

$$\pi((c_1 c_2) \cdot a) = \pi(a) = a = (c_1 c_2) \cdot a$$

となる. よって $\pi((c_1 c_2) \cdot a) = (c_1 c_2) \cdot a$ が得られる. $\bar{c} := \bar{c}, c_1, c_2$ として $(\wedge \mathbf{a})$ を適用すると結論が得られる.

仮定が $(\wedge \mathbf{var})$ によって導出されているとき, t は保留変数 $\pi' \cdot X$ で

$$\text{supp}(\pi^{\pi'^{-1}}) \setminus \{\bar{c}, c_1\} \subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon|_X))$$

をみたしている。いま

$$\text{supp}(\pi^{((c_1 \ c_2)\pi')^{-1}}) \setminus \{c_2\} \subseteq \text{supp}(\pi^{\pi'^{-1}})$$

が成立することを示せば

$$\text{supp}(\pi^{((c_1 \ c_2)\pi')^{-1}}) \setminus \{\bar{c}, c_1, c_2\} \subseteq \text{supp}(\pi^{\pi'^{-1}}) \setminus \{\bar{c}, c_1\} \subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon|_X))$$

が得られ、推論規則 (\wedge var) によって結論が導かれる。任意のアトム a ($\neq c_2$) を取り固定する。 $c_1 = \pi'(a)$ と仮定すると

$$\begin{aligned} \pi^{((c_1 \ c_2)\pi')^{-1}}(a) &= \pi'^{-1}(c_1 \ c_2)\pi(c_1 \ c_2)\pi'(a) \\ &= \pi'^{-1}(c_1 \ c_2)\pi(c_2) \\ &= \pi'^{-1}(c_1 \ c_2)(c_2) \\ &= \pi'^{-1}(c_1) \\ &= \pi'^{-1}\pi'(a) = a \end{aligned}$$

となるので

$$a \notin \text{supp}(\pi^{((c_1 \ c_2)\pi')^{-1}})$$

をみtas。一方で $c_1 \neq \pi'(a)$ と仮定すると

$$c_2 = \pi'(c_2) \neq \pi'(a)$$

となり、さらに

$$\begin{aligned} c_1 &= \pi(c_1) \neq \pi\pi'(a) \\ c_2 &= \pi(c_2) \neq \pi\pi'(a) \end{aligned}$$

が得られる。このことから

$$\begin{aligned} \pi^{((c_1 \ c_2)\pi')^{-1}}(a) &= \pi'^{-1}(c_1 \ c_2)\pi(c_1 \ c_2)\pi'(a) \\ &= \pi'^{-1}(c_1 \ c_2)\pi\pi'(a) \\ &= \pi'^{-1}\pi\pi'(a) = \pi^{\pi'^{-1}}(a) \end{aligned}$$

となるので

$$a \in \text{supp}(\pi^{((c_1 \ c_2)\pi')^{-1}}) \iff a \in \text{supp}(\pi^{\pi'^{-1}})$$

特に

$$a \in \text{supp}(\pi^{((c_1 \ c_2)\pi')^{-1}}) \implies a \in \text{supp}(\pi^{\pi'^{-1}})$$

をみます。以上より

$$\text{supp}(\pi^{((c_1 \ c_2)\pi')^{-1}}) \setminus \{c_2\} \subseteq \text{supp}(\pi^{\pi'^{-1}})$$

が成立する。

仮定が $(\wedge \text{abs})$ によって導出されているとき、 t は抽象 $[a]t$ で

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1, c_3. \pi \wedge (a \ c_3) \cdot t$$

をみたしている。ここで c_3 は仮定に出現しないアトムで、特に $c_3 \neq c_1$ をみます。帰納法の仮定より $c_2 \neq c_3$ なるアトム c_2 に対して

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1, c_2, c_3. \pi \wedge (c_1 \ c_2)(a \ c_3) \cdot t$$

が得られる。ここで

$$(c_1 \ c_2)(a \ c_3) = (a \ c_3)^{(c_1 \ c_2)}(c_1 \ c_2) = ((c_1 \ c_2)(a \ c_3))(c_1 \ c_2)$$

より

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1, c_2, c_3. \pi \wedge ((c_1 \ c_2)(a \ c_3)) \cdot ((c_1 \ c_2) \cdot t)$$

が得られる。 $(c_1 \ c_2)(a) \neq c_3$ かつ c_3 は $(c_1 \ c_2) \cdot t$ に出現しないことに注意して、推論規則 $(\wedge \text{abs})$ を用いると

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1, c_2. \pi \wedge [(c_1 \ c_2)(a)]((c_1 \ c_2) \cdot t)$$

すなわち

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1, c_2. \pi \wedge (c_1 \ c_2) \cdot ([a]t)$$

が得られる。

そのほかの推論規則によって導出されている場合は、帰納法の仮定を用いて容易に示される。 \square

補題 3.6 (束縛アトムの名前替え). 以下の命題が成立する。

$$(A) \ \Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. \pi \wedge (a \ c_1) \cdot t \implies \Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_2. \pi \wedge (a \ c_2) \cdot t.$$

$$(B) \ \Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. (a \ c_1) \wedge t \implies \Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_2. (a \ c_2) \wedge t.$$

ただし c_1, c_2 は t に出現しないアトムで $c_1 \neq a \neq c_2$ かつ $c_1, c_2 \notin \text{supp}(\pi) \cup \{\bar{c}\}$ をみたすものとする。

(証明). 仮定より

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. \pi \wedge (a \ c_1) \cdot t$$

で, $(a \ c_1) \cdot t$ に c_2 が出現しないことから補題 3.5 を用いると

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1, c_2. \pi \wedge (c_1 \ c_2)(a \ c_1) \cdot t$$

が得られる. また c_1, c_2 は t に出現しないことから $(c_1 \ c_2) \cdot t = t$ となるので,

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1, c_2. \pi \wedge (c_1 \ c_2)(a \ c_1)(c_1 \ c_2) \cdot t$$

が得られる. よって

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1, c_2. \pi \wedge (a \ c_2) \cdot t$$

が成立する. ここで $(a \ c_2) \cdot t$ に c_1 は出現しないので, 補題 3.4 より

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_2. \pi \wedge (a \ c_2) \cdot t$$

となる.

(B) 仮定 $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. (a \ c_1) \wedge t$ の導出に関する帰納法を用いる. $c_1 = c_2$ の場合は自明なので $c_1 \neq c_2$ とする.

仮定が $(\wedge \mathbf{a})$ によって導出されているとき, t はアトム a' で $(a \ c_1)(a') = a'$ をみたしている. $c_1 \neq a'$ より $a \neq a'$ であるから, $c_2 \neq a'$ より $(a \ c_2)(a') = a'$ である. よって $\bar{c} := \bar{c}, c_2$ として $(\wedge \mathbf{a})$ を適用すると結論が得られる.

仮定が $(\wedge \mathbf{var})$ によって導出されているとき, t は保留変数 $\pi \cdot X$ で

$$\text{supp}((a \ c_1)^{\pi^{-1}}) \setminus \{\bar{c}, c_1\} \subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon|_X))$$

をみたしている.

$$\text{supp}((a \ c_2)^{\pi^{-1}}) \setminus \{c_2\} \subseteq \text{supp}((a \ c_1)^{\pi^{-1}}) \setminus \{c_1\}$$

となることを示せば

$$\text{supp}((a \ c_2)^{\pi^{-1}}) \setminus \{\bar{c}, c_2\} \subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon|_X))$$

が成立し, $(\wedge \mathbf{var})$ を適用することで結論が得られる.

まず $c_1 \notin \text{supp}((a \ c_2)^{\pi^{-1}})$ を示す. $c_1 \notin \text{supp}(\pi), c_1 \neq a$ より

$$(a \ c_2)^{\pi^{-1}}(c_1) = \pi^{-1}(a \ c_2)\pi(c_1) = \pi^{-1}(a \ c_2)(c_1) = \pi^{-1}(c_1) = c_1$$

となる. よって $c_1 \notin \text{supp}((a\ c_2)^{\pi^{-1}})$ である.

次に $a' \neq c_1, c_2$ が

$$a' \in \text{supp}((a\ c_2)^{\pi^{-1}}) \implies a' \in \text{supp}((a\ c_1)^{\pi^{-1}})$$

をみたすことを示す. c_i ($i = 1, 2$) に対して

$$(a\ c_i)^{\pi^{-1}}(a') = \pi^{-1}(a\ c_i)\pi(a')$$

を考える. $\pi(a') = a$ とすると $c_i \notin \text{supp}(\pi)$ より

$$\pi^{-1}(a\ c_i)\pi(a') = \pi^{-1}(c_i) = c_i \neq a'$$

すなわち

$$a' \in \text{supp}((a\ c_i)^{\pi^{-1}})$$

となる. 一方 $\pi(a') \neq a$ とすると, $a' \neq c_i$ より $\pi(a') \neq \pi(c_i) = c_i$ であるから

$$\pi^{-1}(a\ c_i)\pi(a') = \pi^{-1}\pi(a') = a'$$

すなわち

$$a' \notin \text{supp}((a\ c_i)^{\pi^{-1}})$$

となる. 上記の議論は i によらずに成立するため,

$$a' \in \text{supp}((a\ c_2)^{\pi^{-1}}) \iff a' \in \text{supp}((a\ c_1)^{\pi^{-1}})$$

特に

$$a' \in \text{supp}((a\ c_2)^{\pi^{-1}}) \implies a' \in \text{supp}((a\ c_1)^{\pi^{-1}})$$

となることが示された.

仮定が (λf) , (λtup) で導出されているときは帰納法の仮定より自明.

仮定が (λabs) によって導出されているとき t は抽象 $[a']t'$ で, この仮定に出現しないあるアトム c_3 に対して

$$\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}, c_1, c_3. (a\ c_1) \wedge (a'\ c_3) \cdot t'$$

をみたしている. ここで, c_3 は (A) を用いて c_2 と異なるアトム c'_3 に名前替えできる. $a' \neq c_1 \neq c'_3$ であるから, 帰納法の仮定より

$$\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}, c_2, c'_3. (a\ c_2) \wedge (a'\ c'_3) \cdot t'$$

となる. これに (λabs) を適用すると結論が得られる. □

補題 3.7 (束縛アトムの変換).

$$(A) \Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}. \pi \wedge t \implies \Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}, c_1. \pi \wedge t.$$

$$(B) \Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}. s \overset{\wedge}{\approx}_\alpha t \implies \Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}, c_1. s \overset{\wedge}{\approx}_\alpha t.$$

(証明). (A) 仮定 $\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}. \pi \wedge t$ の導出に関する帰納法で示す.

仮定が $(\wedge \mathbf{a})$ によって導出されているとき, t はアトム a で $\pi(a) = a$ をみたしている.
 $\bar{c} := \bar{c}, c_1$ として $(\wedge \mathbf{a})$ を用いると結論が得られる.

仮定が $(\wedge \mathbf{var})$ によって導出されているとき, t は保留変数 $\pi' \cdot X$ であり

$$\text{supp}(\pi^{\pi'^{-1}}) \setminus \{\bar{c}\} \subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon|_X))$$

をみたしている. また,

$$\text{supp}(\pi^{\pi'^{-1}}) \setminus \{\bar{c}, c_1\} \subseteq \text{supp}(\pi^{\pi'^{-1}}) \setminus \{\bar{c}\}$$

より

$$\text{supp}(\pi^{\pi'^{-1}}) \setminus \{\bar{c}, c_1\} \subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon|_X))$$

となるので, $(\wedge \mathbf{var})$ を用いると結論が得られる.

仮定が $(\wedge \mathbf{abs})$ によって導出されているときは, 束縛アトムの名前替えに注意する. このとき t は抽象 $[a]t'$ であり, この仮定に出現しないあるアトム c_2 に関して

$$\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}, c_2. \pi \wedge (a \ c_2) \cdot t'$$

をみたしている. ここで c_2 を $c'_2 \neq c_1$ に名前替えすると

$$\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}, c'_2. \pi \wedge (a \ c'_2) \cdot t'$$

の導出が得られる. 帰納法の仮定を用いると

$$\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}, c'_2, c_1. \pi \wedge (a \ c'_2) \cdot t'$$

が得られるので, 補題 3.1 より

$$\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}, c_1, c'_2. \pi \wedge (a \ c'_2) \cdot t'$$

が得られる. これに $(\wedge \mathbf{abs})$ を適用すると結論が得られる.

そのほかの推論規則によって導出されている場合は, 帰納法の仮定を用いて容易に示される.

(B) 仮定 $\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}. s \overset{\wedge}{\approx}_\alpha t$ の導出に関する帰納法で示す.

仮定が $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{a})$ によって導出されているとき, s, t は同じアトム a である. $\bar{c} := \bar{c}, c_1$ と
して $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{a})$ を用いると結論が得られる.

仮定が $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{var})$ によって導出されているとき, s, t は同じ変数 X に関する保留変数
 $\pi \cdot X, \pi' \cdot X$ であり,

$$\text{supp}((\pi')^{-1}\pi) \setminus \{\bar{c}\} \subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon|_X))$$

をみます.

$$\text{supp}((\pi')^{-1}\pi) \setminus \{\bar{c}, c_1\} \subseteq \text{supp}((\pi')^{-1}\pi) \setminus \{\bar{c}\}$$

より

$$\text{supp}((\pi')^{-1}\pi) \setminus \{\bar{c}, c_1\} \subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon|_X))$$

となるので, $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{var})$ を用いると結論が得られる.

仮定が $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ab})$ によって導出されているときは, 束縛アトムの名前替えに注意する. こ
のとき s, t は抽象 $[a]s', [b]t'$ ($b \neq a$) であり, この仮定に出現しないあるアトム c_2 に関
して

$$\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}. s' \overset{\wedge}{\approx}_\alpha (a b) \cdot t' \quad (3.3)$$

$$\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}, c_2. (a c_2) \wedge t' \quad (3.4)$$

をみます. (3.3) と帰納法の仮定より

$$\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}, c_1. s' \overset{\wedge}{\approx}_\alpha (a b) \cdot t'$$

が得られる. また (3.4) の c_2 を $c'_2 \neq c_1$ に名前替えして

$$\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}, c'_2. (a c'_2) \wedge t'$$

の導出が得られる. これに (A) を用いると

$$\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}, c'_2, c_1. (a c'_2) \wedge t'$$

が得られ, 補題 3.1 より

$$\Upsilon \vdash \mathbb{I}\bar{c}, c_1, c'_2. (a c'_2) \wedge t'$$

が得られる. これらに $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ab})$ を適用すると結論が得られる.

そのほかの推論規則によって導出されている場合は, 帰納法の仮定を用いて容易に示さ
れる. □

以後, この補題を用いて束縛アトムの弱化を断りなく行う場合がある.

3.2 派生規則 ($\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ba}$)

本節では、この体系の対称性について議論する。 α 同値性の推論規則には非対称な規則 ($\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ab}$) が含まれているため、この体系の対称性については全く自明でない。非出現制約を用いて特徴付けられる従来の α 同値性の定義にも非対称な規則は現れるが、これと対称的な推論と同値であることが文献 [10] では示されている。文献 [13] において、推論規則 ($\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ab}$) の非対称性に着目した α 同値性の対称性についての議論は行われていないが、この規則と対称的な派生規則 ($\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ba}$) が成立することを、不動点制約が α 同値性によって保存されることを用いて示すことができる。

不動点制約と α 同値性について、以下の命題が成立することが知られている。

命題 3.8 ([13, Lemma 3.7] 同変性). 任意の置換 π, π' に対して、以下が成立する。

- (A) $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \pi \wedge t \iff \Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \pi^{\pi'} \wedge \pi' \cdot t.$
- (B) $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s \overset{\wedge}{\approx}_\alpha t \iff \Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \pi \cdot s \overset{\wedge}{\approx}_\alpha \pi \cdot t.$

命題 3.9 ([13, Theorem 3.12] 不動点制約の正当性).

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \pi \wedge t \iff \Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \pi \cdot t \overset{\wedge}{\approx}_\alpha t.$$

注意 3.10. 文献 [13] では、命題 3.8 が成立することを仮定の導出に関する帰納法によって証明している。しかしながら、この証明では推論規則 ($\wedge \mathbf{abs}$) および ($\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ab}$) におけるアトム c_1 が暗黙的に名前替えされており、議論に飛躍がある。このことに関して、前章で証明した補題 3.6 を用いると、議論をより丁寧に行うことができる。

補題 3.11 (α 同値な名目項における不動点制約の保存).

$$\Upsilon_1 \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s \overset{\wedge}{\approx}_\alpha t, \Upsilon_2 \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \pi \wedge s \implies \Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \pi \wedge t.$$

(証明). $\text{size}(s)$ に関する帰納法で示す。

$s = a$ のとき、一つ目の仮定は ($\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{a}$) でのみ導出されるので $t = s = a$ である。二つ目の仮定に命題 2.29 を適用すると、直ちに結論が得られる。

$s = \pi_1 \cdot X$ のとき、一つ目の仮定は ($\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{var}$) でのみ導出されるので、 t は $\pi_2 \cdot X$ なる保留変数である。 ($\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{var}$) の仮定より

$$\text{supp}(\pi_2^{-1}\pi_1) \setminus \{\bar{c}\} \subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon_1|_X)) \subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon_1 \cup \Upsilon_2|_X)) \quad (3.5)$$

となる. また $\pi_2^{-1}\pi_1$ およびその逆写像が単射であることから, 任意のアトム x に対して

$$\begin{aligned} x \in \text{supp}(\pi_2^{-1}\pi_1) &\iff \pi_2^{-1}\pi_1(x) \neq x \\ &\iff x \neq \pi_1^{-1}\pi_2(x) \iff x \in \text{supp}(\pi_1^{-1}\pi_2) \end{aligned}$$

すなわち $\text{supp}(\pi_2^{-1}\pi_1) = \text{supp}(\pi_1^{-1}\pi_2)$ となるので,

$$\text{supp}(\pi_1^{-1}\pi_2) \setminus \{\bar{c}\} \subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon_1 \cup \Upsilon_2|_X)) \quad (3.6)$$

が成立する. さらに, 二つ目の仮定が $(\wedge \text{var})$ でのみ導出されることから,

$$\begin{aligned} \text{supp}(\pi_1^{-1}\pi\pi_1) \setminus \{\bar{c}\} &= \text{supp}(\pi^{\pi_1^{-1}}) \setminus \{\bar{c}\} \\ &\subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon_2|_X)) \subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon_1 \cup \Upsilon_2|_X)) \end{aligned} \quad (3.7)$$

となる. (3.5), (3.6), (3.7) より

$$\begin{aligned} \text{supp}(\pi^{\pi_2^{-1}}) \setminus \{\bar{c}\} &= \text{supp}(\pi_2^{-1}\pi\pi_2) \setminus \{\bar{c}\} \\ &\subseteq \text{supp}((\pi_2^{-1}\pi_1)(\pi_1^{-1}\pi\pi_1)(\pi_1^{-1}\pi_2)) \\ &\subseteq \text{supp}(\pi_2^{-1}\pi_1) \cup \text{supp}(\pi_1^{-1}\pi\pi_1) \cup \text{supp}(\pi_1^{-1}\pi_2) \\ &\subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon_1 \cup \Upsilon_2|_X)) \end{aligned}$$

となり, $(\wedge \text{var})$ を適用すると結論が得られる.

$s = f s'$ のとき, 一つ目の仮定は $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha f)$ でのみ導出されるので, t は $f t'$ なる函数適用である. $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha f)$ の仮定と命題 2.29 より

$$\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s' \overset{\wedge}{\approx}_\alpha t'$$

が成立する. 一方, 二つ目の仮定は $(\wedge f)$ でのみ導出されるので, $(\wedge f)$ の仮定と命題 2.29 より

$$\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \pi \wedge s'$$

となる. ここで $\text{size}(s') < \text{size}(s)$ より帰納法の仮定を用いると

$$\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \pi \wedge t'$$

となるので, $(\wedge f)$ を適用すると結論が得られる.

$s = (s_1, \dots, s_n)$ のとき, 一つ目の仮定は $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \text{tup})$ でのみ導出されるので, t は (t_1, \dots, t_n) なる n 個組である. $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \text{tup})$ の仮定と命題 2.29 より, $1 \leq i \leq n$ に対して

$$\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s_i \overset{\wedge}{\approx}_\alpha t_i$$

が成立する. 一方, 二つ目の仮定は $(\wedge \mathbf{tup})$ でのみ導出されるので, $(\wedge \mathbf{tup})$ の仮定と命題 2.29 より, 任意の $1 \leq i \leq n$ に対して

$$\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \pi \wedge s_i$$

が成立する. ここで

$$\begin{aligned} \mathbf{size}(s_i) &\leq \sum_j (\mathbf{size}(s_j)) \\ &< 1 + \sum_j (\mathbf{size}(s_j)) = \mathbf{size}((s_1, \dots, s_n)) \end{aligned}$$

より帰納法の仮定を用いると,

$$\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \pi \wedge t_i$$

となるので, $(\wedge \mathbf{tup})$ を適用すると結論が得られる.

$s = [a]s'$ のとき, 一つ目の仮定の導出に用いられるのは $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{a})$ と $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ab})$ のいずれかであるから, t が $[a]t'$ と $[b]t'$ のうち, どちらの形をしているかで場合分けする.

$t = [a]t'$ のときは, 函数適用のときと同様にして示せる.

$t = [b]t'$ のとき, $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ab})$ より以下が成立する.

$$\Upsilon_1 \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s' \overset{\wedge}{\approx}_\alpha (a b) \cdot t' \quad (3.8)$$

$$\Upsilon_1 \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. (a c_1) \wedge t' \quad (3.9)$$

また, 二つ目の仮定を導出できる推論規則が $(\wedge \mathbf{abs})$ のみであるから, 規則の仮定より

$$\Upsilon_2 \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. \pi \wedge (a c_1) \cdot s' \quad (3.10)$$

となる. ここで束縛アトム c_1 は (3.9) と同じものとなるように名前替えしてもよいことに注意する. (3.8) に命題 3.8, 2.29 を適用すると

$$\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. (a c_1) \cdot s' \overset{\wedge}{\approx}_\alpha (a c_1)(a b) \cdot t'$$

となり, $\mathbf{size}((a c_1) \cdot s') = \mathbf{size}(s') < \mathbf{size}([a]s')$ より (3.10) に命題 2.29 を適用して帰納法の仮定を用いると

$$\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. \pi \wedge (a c_1)(a b) \cdot t'$$

が得られる. さらに $(a c_1)(a b) = (a b)(b c_1)$ より

$$\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. \pi \wedge (a b)(b c_1) \cdot t' \quad (3.11)$$

が得られる. (3.9) に命題 3.8, 2.29 を適用すると,

$$\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash \mathcal{M}\bar{c}, c_1. (a \ c_1)^{(b \ c_1)} \wedge (b \ c_1) \cdot t'$$

すなわち

$$\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash \mathcal{M}\bar{c}, c_1. (a \ b) \wedge (b \ c_1) \cdot t'$$

となる. 命題 3.9 より

$$\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash \mathcal{M}\bar{c}, c_1. (a \ b)(b \ c_1) \cdot t' \stackrel{\wedge}{\approx}_\alpha (b \ c_1) \cdot t'$$

となり

$$\begin{aligned} \text{size}((a \ b)(b \ c_1) \cdot t') &= \text{size}(t') \\ &= \text{size}((a \ b) \cdot t') \\ &= \text{size}(s') < \text{size}([a]s') \end{aligned}$$

より (3.11) と帰納法の仮定を用いると

$$\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash \mathcal{M}\bar{c}, c_1. \pi \wedge (b \ c_1) \cdot t'$$

となる. これに (\wedge abs) を適用することで結論が得られる. \square

注意 3.12. 補題 3.11 は, 不動点制約が α 同値性によって左辺から右辺へと保存されることを示している. このことは文献 [13] でも示されているが, これは α 同値性が同値関係であることを前提とした推移性による帰結であり, 本論文での議論とは全く異なる.

定理 3.13 (派生規則 ($\stackrel{\wedge}{\approx}_\alpha$ ba)). 次のような派生規則が成立する. ここで c_1 は下式に出現しないアトムである.

$$\frac{\Upsilon \vdash \mathcal{M}\bar{c}, c_1. (b \ c_1) \wedge s \quad \Upsilon \vdash \mathcal{M}\bar{c}. (b \ a) \cdot s \stackrel{\wedge}{\approx}_\alpha t}{\Upsilon \vdash \mathcal{M}\bar{c}. [a]s \stackrel{\wedge}{\approx}_\alpha [b]t} (\stackrel{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ba})$$

(証明). 以下を仮定する.

$$\Upsilon \vdash \mathcal{M}\bar{c}, c_1. (b \ c_1) \wedge s \tag{3.12}$$

$$\Upsilon \vdash \mathcal{M}\bar{c}. (b \ a) \cdot s \stackrel{\wedge}{\approx}_\alpha t \tag{3.13}$$

(3.13) に命題 3.8 を適用すると

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s \overset{\wedge}{\approx}_{\alpha} (a b) \cdot t \quad (3.14)$$

となる. (3.12) と補題 3.11 を用いると

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. (b c_1) \wedge (a b) \cdot t$$

となり, 命題 3.8 を適用すると

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. (b c_1)^{(a b)^{-1}} \wedge t$$

すなわち

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. (a c_1) \wedge t$$

が得られる. これと (3.14) を $(\overset{\wedge}{\approx}_{\alpha} \mathbf{ab})$ に適用すると

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. [a]s \overset{\wedge}{\approx}_{\alpha} [b]t$$

が得られる. □

3.3 α 同値性が同値関係であることの証明

本節では, 不動点制約によって特徴付けられる α 同値性が, 同値関係であることを示す. 前節で示した派生規則 $(\overset{\wedge}{\approx}_{\alpha} \mathbf{ba})$ を用いると, この体系の対称的な性質を示すことができる. また, これらを含めて, 本章で示してきた体系の性質から α 同値性が同値関係であることが示される. この性質を, 文献 [13] では非出現制約を用いた別の体系の結果 [7, 10] を用いて示していたが, 本章で与える別証明では体系そのものの性質から直接導く.

補題 3.14. 任意の Υ, \bar{c} に対して $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. - \overset{\wedge}{\approx}_{\alpha} -$ は反射的かつ対称的である.

(証明). まず反射的であることを示す. すなわち任意の項 s に対して

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s \overset{\wedge}{\approx}_{\alpha} s$$

となることを示す. 以下, s の構造に関する帰納法を用いる.

s がアトム a のとき, $(\overset{\wedge}{\approx}_{\alpha} \mathbf{a})$ より直ちに成立する.

s が保留変数 $\pi \cdot X$ のとき,

$$\text{supp}(\pi^{-1}\pi) \subseteq \emptyset \subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon|_X))$$

が無条件で成立するので、 $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{var})$ を適用すると

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \pi \cdot X \overset{\wedge}{\approx}_\alpha \pi \cdot X$$

が得られる。

s がその他の形をしている場合は、対応する規則の仮定に帰納法の仮定を適用することで直ちに成立する。なお $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ab})$ の導出規則が使われていることはないことに注意する。以上より反射的であることが示された。

次に対称的であることを示す。すなわち任意の項 s, t に対して

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s \overset{\wedge}{\approx}_\alpha t \implies \Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. t \overset{\wedge}{\approx}_\alpha s$$

となることを示す。以下、 $\text{size}(s)$ に関する帰納法を用いる。

$s = a$ のとき、仮定に適用できる規則は $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{a})$ のみであるから $t = s = a$ となる。よって $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{a})$ より、直ちに結論が成立する。

$s = \pi \cdot X$ のとき、仮定に適用できる規則は $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{var})$ のみである。そこで $t = \pi' \cdot X$ とすると、 $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{var})$ の仮定より

$$\text{supp}(\pi'^{-1}\pi) \setminus \{\bar{c}\} \subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon|_X))$$

が得られる。また、任意のアトム x に対して

$$\begin{aligned} x \in \text{supp}(\pi'^{-1}\pi) &\iff \pi'^{-1}\pi(x) \neq x \\ &\iff x \neq \pi^{-1}\pi'(x) \iff x \in \text{supp}(\pi^{-1}\pi') \end{aligned}$$

となるので、 $\text{supp}(\pi'^{-1}\pi) = \text{supp}(\pi^{-1}\pi')$ が成立する。よって

$$\text{supp}(\pi^{-1}\pi') \setminus \{\bar{c}\} \subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon|_X))$$

となり、 $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{var})$ を適用すると

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \pi' \cdot X \overset{\wedge}{\approx}_\alpha \pi \cdot X$$

が得られる。

$s = f s'$ と $s = (s_1, \dots, s_n)$ のときは、対応する推論規則の仮定に帰納法の仮定を用いることで容易に示される。

$s = [a]s'$ のとき、一つ目の仮定を導出できるのは $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha [\mathbf{a}])$ と $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ab})$ のいずれかであるから、 t が $[a]t'$ と $[b]t'$ のうち、どちらの形をしているかで場合分けする。

$t = [a]t'$ のとき, $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{a})$ の仮定に帰納法の仮定を用いることで容易に示される.
 $t = [b]t'$ のとき $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ab})$ の仮定より, この仮定に出現しないあるアトム c_1 に関して以下が成立する.

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s' \overset{\wedge}{\approx}_\alpha (a b) \cdot t' \quad (3.15)$$

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. (a c_1) \wedge t' \quad (3.16)$$

$\text{size}(s') < \text{size}([a]s')$ より (3.15) に帰納法の仮定を適用すると,

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. (a b) \cdot t' \overset{\wedge}{\approx}_\alpha s'$$

が成立する. これと (3.16) に $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ba})$ (定理 3.13) を適用すると

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. [b]t' \overset{\wedge}{\approx}_\alpha [a]s'$$

が得られる. 以上より対称的であることが示された. \square

補題 3.15 (α 同値な名目項における不動点制約の保存 (補題 3.11 の逆向き)).

$$\Upsilon_1 \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s \overset{\wedge}{\approx}_\alpha t, \Upsilon_2 \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \pi \wedge t \implies \Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \pi \wedge s.$$

(証明). 補題 3.14 による $\overset{\wedge}{\approx}_\alpha$ の対称性と, 補題 3.11 から直ちに成立する. \square

補題 3.16. $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. [a]s \overset{\wedge}{\approx}_\alpha [b]t$ と仮定する. このとき $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ba})$ を用いた導出が存在する. すなわち, この仮定に出現しないあるアトム c_1 に関して以下が成立する.

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. (b c_1) \wedge s$$

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. (b a) \cdot s \overset{\wedge}{\approx}_\alpha t$$

(証明). 補題 3.14 より $\overset{\wedge}{\approx}_\alpha$ が対称的であることから

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. [b]t \overset{\wedge}{\approx}_\alpha [a]s$$

となる. これを導出できる推論規則は $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ab})$ のみであることから, $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ab})$ の仮定より

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. t \overset{\wedge}{\approx}_\alpha (b a) \cdot s$$

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. (b c_1) \wedge s$$

が得られる. $\overset{\wedge}{\approx}_\alpha$ の対称性を用いて, 前者の左辺と右辺を交換すると, これらは示すべきことである. \square

補題 3.17. 任意の Υ, \bar{c} に対して $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. - \stackrel{\wedge}{\approx}_\alpha -$ は推移的である. すなわち, 任意の項 s, t, u に対して $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s \stackrel{\wedge}{\approx}_\alpha t, t \stackrel{\wedge}{\approx}_\alpha u \implies \Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s \stackrel{\wedge}{\approx}_\alpha u$ が成立する.

(証明). $\text{size}(t)$ に関する帰納法を用いる.

$t = a$ のとき, 仮定を導出できる規則は $(\stackrel{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{a})$ のみであるから $s = u = t = a$ が成立し, これに $(\stackrel{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{a})$ を適用すると結論が成立する.

$t = \pi_2 \cdot X$ のとき, 仮定を導出できる規則は $(\stackrel{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{var})$ のみであるから, s, u は $\pi_1 \cdot X, \pi_3 \cdot X$ なる保留変数である. このとき, $(\stackrel{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{var})$ の仮定より以下が成立する.

$$\begin{aligned} \text{supp}(\pi_2^{-1}\pi_1) \setminus \{\bar{c}\} &\subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon|_X)) \\ \text{supp}(\pi_3^{-1}\pi_2) \setminus \{\bar{c}\} &\subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon|_X)) \end{aligned}$$

ここで

$$\text{supp}(\pi_3^{-1}\pi_1) = \text{supp}((\pi_3^{-1}\pi_2)(\pi_2^{-1}\pi_1)) \subseteq \text{supp}(\pi_2^{-1}\pi_1) \cup \text{supp}(\pi_3^{-1}\pi_2)$$

より

$$\text{supp}(\pi_3^{-1}\pi_1) \setminus \{\bar{c}\} \subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon|_X))$$

となる. これに $(\stackrel{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{var})$ を適用することで, 以下のように結論が得られる.

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \pi_1 \cdot X \stackrel{\wedge}{\approx}_\alpha \pi_3 \cdot X$$

$t = f t'$ と $t = (t_1, \dots, t_n)$ のとき, 仮定を導出できる推論規則を見ると s, u も同じ種類の項でなければならない. 推論規則の仮定に帰納法の仮定を適用すれば, 容易に結論が示される.

$t = [a]t'$ のとき, 仮定を導出できる推論規則は $(\stackrel{\wedge}{\approx}_\alpha [\mathbf{a}])$, $(\stackrel{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ab})$ の二つである. したがって s, t, u はすべて抽象だが, 束縛しているアトムが等しいとは限らないので場合分けをして考える.

$s := [a]s', t := [a]t', u := [a]u'$ のとき, $\text{size}(t') < \text{size}(t)$ より, それぞれ対応する推論規則 $(\stackrel{\wedge}{\approx}_\alpha [\mathbf{a}])$ の仮定に帰納法の仮定を適用することで, 容易に結論が導かれる.

$s := [a]s', t := [a]t', u := [b]u'$ ($a \neq b$) のとき, それぞれ対応する推論規則 $(\stackrel{\wedge}{\approx}_\alpha [\mathbf{a}])$ と $(\stackrel{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ab})$ の仮定より以下が成り立つ.

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s' \stackrel{\wedge}{\approx}_\alpha t' \tag{3.17}$$

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. t' \stackrel{\wedge}{\approx}_\alpha (a b) \cdot u' \tag{3.18}$$

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. (a c_1) \wedge u' \tag{3.19}$$

$\text{size}(t') < \text{size}(t)$ より, (3.17), (3.18) に帰納法の仮定を適用すると

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s' \overset{\wedge}{\approx}_\alpha (a b) \cdot u'$$

となる. これと (3.19) に $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ab})$ を適用すると

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. [a]s' \overset{\wedge}{\approx}_\alpha [b]u'$$

が得られる.

$s := [a]s', t := [b]t', u := [b]u'$ ($a \neq b$) のとき, 仮定に $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ba}), (\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{a})$ を適用すると以下が成り立つ.

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. (b c_1) \wedge s' \tag{3.20}$$

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. (b a) \cdot s' \overset{\wedge}{\approx}_\alpha t' \tag{3.21}$$

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. t' \overset{\wedge}{\approx}_\alpha u' \tag{3.22}$$

$\text{size}(t') < \text{size}(t)$ より (3.21), (3.22) に帰納法の仮定を適用すると

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. (b a) \cdot s' \overset{\wedge}{\approx}_\alpha u'$$

となり, これと (3.20) に $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ba})$ を適用すると

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. [a]s' \overset{\wedge}{\approx}_\alpha [b]u'$$

が得られる.

$s := [a]s', t := [b]t', u := [d]u'$ ($a \neq b \neq d$) のとき, 一つ目の仮定が $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ba})$ によって導出されることから

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. (b c_1) \wedge s' \tag{3.23}$$

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. (b a) \cdot s' \overset{\wedge}{\approx}_\alpha t' \tag{3.24}$$

二つ目の仮定が $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ab})$ によって導出されることから

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. (b c_1) \wedge u' \tag{3.25}$$

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. t' \overset{\wedge}{\approx}_\alpha (b d) \cdot u' \tag{3.26}$$

が成立する. ただし, アトム c_1 が共通のものとなるように名前替えした. $\text{size}(t') < \text{size}(t)$ より, (3.24), (3.26) に帰納法の仮定を適用すると

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. (b a) \cdot s' \overset{\wedge}{\approx}_\alpha (b d) \cdot u' \tag{3.27}$$

が成立する. $a = d$ のときは, 命題 3.8 より

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s' \overset{\wedge}{\approx}_{\alpha} u'$$

となり, $(\overset{\wedge}{\approx}_{\alpha}[\mathbf{a}])$ を適用して

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. [a]s' \overset{\wedge}{\approx}_{\alpha} [d]u'$$

が得られる. $a \neq d$ と仮定する. (3.23) に命題 3.8 を用いると

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. (b c_1)^{(d c_1)} \wedge (d c_1) \cdot s'$$

すなわち

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. (b d) \wedge (d c_1) \cdot s' \tag{3.28}$$

が得られる. (3.26) に命題 3.8 を適用すると

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. (d b) \cdot t' \overset{\wedge}{\approx}_{\alpha} u'$$

となり, これに補題 3.7 を適用してから (3.25) を用いて補題 3.15 を適用すると

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. (b c_1) \wedge (d b) \cdot t'$$

となる. これに命題 3.8 を適用すると

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. (b c_1)^{(b d)} \wedge t'$$

すなわち

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. (d c_1) \wedge t'$$

が得られる. これと (3.24) に補題 3.7 と 3.15 を適用すると

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. (d c_1) \wedge (b a) \cdot s'$$

となり, 再び命題 3.8 を適用すると

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. (d c_1)^{(a b)} \wedge s'$$

すなわち

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. (d c_1) \wedge s' \tag{3.29}$$

が得られる. さらに命題 3.9 を用いると

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. (d c_1) \cdot s' \overset{\wedge}{\approx}_{\alpha} s'$$

が得られる. ここで (3.28) と補題 3.11 を用いると

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. (b\ d) \wedge s'$$

となり, もう一度命題 3.9 を適用すると

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. (b\ d) \cdot s' \overset{\wedge}{\approx}_\alpha s'$$

となり, 最後に命題 3.8 を適用すると

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. s' \overset{\wedge}{\approx}_\alpha (b\ d) \cdot s' \tag{3.30}$$

が得られる. ここで, (3.27) に命題 3.8 を適用すると

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. (a\ d)(d\ b)(b\ a) \cdot s' \overset{\wedge}{\approx}_\alpha (a\ d) \cdot u'$$

すなわち

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. (b\ d) \cdot s' \overset{\wedge}{\approx}_\alpha (a\ d) \cdot u'$$

が得られる.

$$\text{size}((b\ d) \cdot s') = \text{size}(s') = \text{size}(t') < \text{size}(t)$$

より, これと (3.30) に帰納法の仮定を適用すると

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s' \overset{\wedge}{\approx}_\alpha (a\ d) \cdot u'$$

となり, これと (3.29) を $(\overset{\wedge}{\approx}_\alpha \mathbf{ba})$ に適用すると

$$\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. [a]s' \overset{\wedge}{\approx}_\alpha [d]u'$$

が得られる. 以上より推移的であることが示された. □

定理 3.18. 任意の Υ, \bar{c} に対して $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. - \overset{\wedge}{\approx}_\alpha -$ は同値関係である.

(証明). 補題 3.14, 3.17 より直ちに成立する. □

第4章

不動点制約による名目書き換え

本章では、不動点制約による新しい名目書き換えの定義とその具体例について紹介し、従来の名目書き換えとの関連性や書き換え規則の一様性に関する性質を示す。

4.1 書き換えの定義

本節では、第3章で性質を調べた不動点制約と α 同値性を用いて、名目項の書き換えを定義する。また、書き換えの具体例を挙げる。

定義 4.1 (書き換え). 不動点環境 Υ と項 l, r からなる3つ組を (名目) 書き換え規則とよび、 $\Upsilon \vdash l \rightarrow r$ と書く。また、書き換え規則の集合を (名目) 書き換えシステムとよぶ。不動点環境 Ψ と束縛アトム \bar{c} のもとでの、書き換え規則 $R = \Upsilon \vdash l \rightarrow r$ と置換 π と位置 p と代入 σ を用いた項 s から項 t への書き換えを $\Psi \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s \rightarrow_{\langle R, \pi, p, \sigma \rangle} t$ と書く。これは、以下のように定義される。

$$\Psi \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s \rightarrow_{\langle R, \pi, p, \sigma \rangle} t \stackrel{\text{def}}{\iff} s = C[s']_p, t = C[r^\pi \sigma]_p, \Psi \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \Upsilon^\pi \sigma, s' \stackrel{\wedge}{\approx}_\alpha l^\pi \sigma$$

ここで、 l に現れる変数は Ψ にも s にも現れないものとする。 $\Psi \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s \rightarrow_{\langle R, \pi, p, \sigma \rangle} t$ となるような置換 π と位置 p と代入 σ が存在するとき、 $\Psi \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s \rightarrow_R t$ と書く。また、書き換えシステム \mathcal{R} に対して、 $\Psi \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s \rightarrow_R t$ となるような書き換え規則 $R \in \mathcal{R}$ が存在するとき、 $\Psi \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s \rightarrow_{\mathcal{R}} t$ と書く。

補題 4.2. $\Psi' \subseteq \Psi$ かつ $\{\bar{c}'\} \subseteq \{\bar{c}\}$ とすると

$$\Psi' \vdash \mathcal{I}\bar{c}'. s \rightarrow_{\langle R, \pi, p, \sigma \rangle} t \implies \Psi \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s \rightarrow_{\langle R, \pi, p, \sigma \rangle} t$$

が成立する。

(証明). 命題 2.29 と補題 3.7 より成立する. \square

以後, 不動点環境 Ψ と束縛アトム \bar{c} を固定した際に定まる, 名目項上の 2 項関係 $\Psi \vdash \mathcal{I}\bar{c}. - \bowtie_i - (i \in \{1, 2\})$ に対して, $\Psi \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s \bowtie_1 t, t \bowtie_2 u$ を, $\Psi \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s \bowtie_1 t \bowtie_2 u$ と略記する.

例 4.3 (書き換え). \mathcal{R}_{pnf} を以下の 2 つの書き換え規則からなる書き換えシステムとする.

$$(a \ c) \wedge Y \vdash \text{and} (\text{forall } [a]X, Y) \rightarrow \text{forall } [a]\text{and} (X, Y) \quad (\forall_1)$$

$$(a \ c) \wedge X \vdash \text{and} (X, \text{forall } [a]Y) \rightarrow \text{forall } [a]\text{and} (X, Y) \quad (\forall_2)$$

この書き換えシステムは, 例 1.3 のように, 全称量子子と論理積をもつ論理式の冠頭標準形を求める同値変形を表現する. 次のような項を考える.

$$t_1 = \text{and} (\text{forall } [a]\text{or} (\text{p } a, Z), \text{forall } [a]q \ a)$$

$$t_2 = \text{forall } [a]\text{and} (\text{or} (\text{p } a, Z), \text{forall } [a]q \ a)$$

$$t_3 = \text{forall } [a]\text{forall } [b]\text{and} (\text{or} (\text{p } a, Z), q \ b)$$

$$t'_3 = \text{forall } [a]\text{forall } [a]\text{and} (\text{or} (\text{p } a, Z), q \ a)$$

いま, $i \in \{1, 2\}$ に対して, 規則 (\forall_i) の左辺と右辺をそれぞれ l_i, r_i とおく. このとき, $\sigma_1 = [X \mapsto \text{or} (\text{p } a, Z)][Y \mapsto \text{forall } [a]q \ a]$ なる代入に対して $t_1 = l_1$ (反射性よりこれらは α 同値) かつ $t_2 = r_1$ となり, $\vdash (a \ c) \wedge \text{forall}[a]q \ a$ が成立することから $\vdash t_1 \rightarrow_{\langle \forall_1, \text{Id}, \varepsilon, \sigma_1 \rangle} t_2$ が得られる. また, $\sigma_2 = [X \mapsto \text{or} (\text{p } a, Z)][Y \mapsto q \ b]$ なる代入に対して, 例 2.28 より $(b \ c') \wedge Z \vdash \mathcal{I}\bar{c}. ((a \ c) \wedge X)^{(a \ b)} \sigma_2, t_2|_{1.1} \stackrel{\wedge}{\approx}_{\alpha} l_2^{(a \ b)} \sigma_2$ が成立し, ある文脈 C に対して $t_2 = C[t_2|_{1.1}]$ かつ $t_3 = C[r_2^{(a \ b)} \sigma_2]$ となることから, $(b \ c') \wedge Z \vdash \mathcal{I}\bar{c}. t_2 \rightarrow_{\langle \forall_2, (a \ b), 1.1, \sigma_2 \rangle} t_3$ が得られる. さらに, 補題 4.2 を用いると $(b \ c') \wedge Z \vdash \mathcal{I}\bar{c}. t_1 \rightarrow_{\mathcal{R}_{\text{pnf}}} t_2 \rightarrow_{\mathcal{R}_{\text{pnf}}} t_3$ が得られる. つまり, 不動点環境 $\{(b \ c') \wedge Z\}$ のもとで, 新アトム量子子による束縛アトム c に対して, 書き換えシステム \mathcal{R}_{pnf} は項 t_1 を項 t_3 に書き換える. t_2 から t_3 への書き換えでは, 抽象で束縛されたアトムが書き換えるの定義によって自動的に名前替えされていることに注意する.

一方で, $\sigma'_2 = [X \mapsto \text{or} (\text{p } a, Z)][Y \mapsto q \ a]$ なる代入を用いると, ある文脈 C のもとで, $t_2 = C[l_2 \sigma'_2]_{1.1}$ (反射性より $(b \ c') \wedge Z \vdash \mathcal{I}\bar{c}. t_2|_{1.1} \stackrel{\wedge}{\approx}_{\alpha} l_2 \sigma'_2$) かつ $t'_3 = C[r_2 \sigma'_2]_{1.1}$ となるが, $(b \ c') \wedge Z \vdash \mathcal{I}\bar{c}. t_2 \rightarrow_{\langle \forall_2, \text{Id}, 1.1, \sigma'_2 \rangle} t'_3$ なる書き換えは成立しない. これは不動点制約が関係している. t_2 から t_3 への書き換えでは $(b \ c') \wedge Z \vdash \mathcal{I}\bar{c}. ((a \ c) \wedge X)^{(a \ b)} \sigma_2$ つまり $(b \ c') \wedge Z \vdash \mathcal{I}\bar{c}. (b \ c) \wedge \text{or} (\text{p } a, Z)$ が成立するが, 今回は $(b \ c') \wedge Z \vdash \mathcal{I}\bar{c}. ((a \ c) \wedge X) \sigma'_2$ つまり $(b \ c') \wedge Z \vdash \mathcal{I}\bar{c}. (a \ c) \wedge \text{or} (\text{p } a, Z)$ が成立しないため, 書き換えるの定義をみたしていない.

4.2 非出現制約との関連性

本節では、前節で定義した不動点制約による名目書き換えと、従来の名目書き換えとの関連性について述べる。第1章で説明した通り、従来の名目書き換えはアトム a の非出現制約を用いて特徴付けられる。非出現制約は $a\#t$ のようなアトムと項の組であり、直感的には、抽象によって束縛されない自由なアトム a が項 t の中に現れないことを意味する。 $a\#X$ のような形をした非出現制約の集合を非出現環境とよぶ。非出現環境 ∇ のもとで非出現制約 $a\#t$ が成立することを $\nabla \vdash a\#t$ と書く。また、非出現環境 ∇ のもとで項 s と項 t が α 同値であることを $\nabla \vdash s \approx_\alpha t$ と書く。これらは本論文の体系と同様に、推論規則によって定義される(具体的な定義については文献[10,11]を参照)。

従来の名目書き換えでの書き換え規則は、非出現環境 ∇ と項 l, r の3つ組 $\nabla \vdash l \rightarrow r$ として与えられる。書き換え規則 $R = \nabla \vdash l \rightarrow r$ による書き換えは、次のように定義される[11]。ここで、 l に現れる変数は Δ にも s にも現れないものとする。定義4.1での書き換えの定義は、これを参考にして与えたものである。

$$\Delta \vdash s \rightarrow_{(R, \pi, p, \sigma)} t \stackrel{\text{def}}{\iff} s = C[s']_p, t = C[r^\pi \sigma]_p, \Delta \vdash \nabla^\pi \sigma, s' \approx_\alpha l^\pi \sigma$$

文献[13]では、非出現環境から不動点環境への変換手法や不動点制約から非出現制約への変換手法を用いることで、それぞれの体系で定義された導出の間の関連性について調べられている。本節では、これらの変換のうち非出現環境から不動点環境への変換手法を用いることで、従来の名目書き換えにおける書き換え規則から前節で定義した書き換え規則への変換を試みる。非出現環境 ∇ に対して $[\nabla]_\lambda = \{(a\ c_a) \wedge X \mid a\#X \in \nabla\}$ なる不動点環境を考える。ここで c_a は、この不動点環境を与えた段階では用いられていない、新しいアトムである。このとき、それぞれの体系での導出に関して以下が成立する。

命題 4.4 ([13, Theorem 3.15 (1)]). $\Delta \vdash a\#t \iff [\Delta]_\lambda \vdash \forall c. (a\ c) \wedge t$. ここで、アトム c は Δ や t や $[\Delta]_\lambda$ に出現しない、新しいアトムとする。

命題 4.5 ([13, Theorem 3.16 (1)]). $\Delta \vdash s \approx_\alpha t \implies [\Delta]_\lambda \vdash s \overset{\wedge}{\approx}_\alpha t$.

注意 4.6. 命題4.5は環境の変換によって、従来の α 同値性を本論文での α 同値性に翻訳できることを意味している。逆に、本論文での α 同値性は束縛アトムを伴う場合があるため、従来の α 同値性が成立するためには環境を変換するだけでなく、束縛アトムに関する条件を非出現制約としてさらに仮定する必要がある。

従来の名目書き換えでの書き換え規則から、前節で定義した書き換え規則への変換を、以下のように与える。

定義 4.7 (書き換え規則の変換). (非出現制約による) 書き換え規則 $R = \nabla \vdash l \rightarrow r$ に対し, $[R]_\lambda = [\nabla]_\lambda \vdash l \rightarrow r$ なる (不動点制約による) 書き換え規則を定める. アトムを選び方によって $[R]_\lambda$ は無数に定まり, 一意ではないことに注意する. また, ∇ から $[\nabla]_\lambda$ への変換で導入した新しいアトムの集合 $\{c_a \mid (a \ c_a) \wedge X \in [\nabla]_\lambda\}$ を $\bar{c}_{[\nabla]_\lambda}$ と書く.

この変換によって, 従来の名目書き換えは定義 4.1 で定めた名目書き換えで模倣できる.

定理 4.8. $\Delta \vdash s \rightarrow_{\langle R, \pi, p, \sigma \rangle} t \implies [\Delta]_\lambda \vdash \mathbb{I}\bar{c}_{[\nabla]_\lambda}. s \rightarrow_{\langle [R]_\lambda, \pi, p, \sigma \rangle} t.$

(証明). 仮定 $\Delta \vdash s \rightarrow_{\langle R, \pi, p, \sigma \rangle} t$ より, 以下が成立している.

$$s = C[s']_p, t = C[r^\pi \sigma]_p, \Delta \vdash \nabla^\pi \sigma, s' \approx_\alpha l^\pi \sigma$$

命題 4.4 と c_a が新しいアトムであることから, $a \# X \in \nabla$ に対して

$$\begin{aligned} \Delta \vdash (a \# X)^\pi \sigma &\iff \Delta \vdash a^\pi \# X \sigma \\ &\iff [\Delta]_\lambda \vdash \mathbb{I}c_a. (a^\pi \ c_a) \wedge X \sigma \\ &\iff [\Delta]_\lambda \vdash \mathbb{I}c_a. (\pi(a) \ \pi(c_a)) \wedge X \sigma \\ &\iff [\Delta]_\lambda \vdash \mathbb{I}c_a. (a \ c_a)^\pi \wedge X \sigma \\ &\iff [\Delta]_\lambda \vdash \mathbb{I}c_a. ((a \ c_a) \wedge X)^\pi \sigma \end{aligned}$$

が得られる. よって $[\Delta]_\lambda \vdash \mathbb{I}\bar{c}_{[\nabla]_\lambda}. [\nabla]_\lambda^\pi \sigma$ となる. また, 命題 4.5 と補題 3.7 より

$$\begin{aligned} \Delta \vdash s' \approx_\alpha l^\pi \sigma &\implies [\Delta]_\lambda \vdash s' \overset{\wedge}{\approx}_\alpha l^\pi \sigma \\ &\implies [\Delta]_\lambda \vdash \mathbb{I}\bar{c}_{[\nabla]_\lambda}. s' \overset{\wedge}{\approx}_\alpha l^\pi \sigma \end{aligned}$$

が得られる. $s = C[s']_p$ かつ $t = C[r^\pi \sigma]_p$ となることと合わせると, これらは書き換え $[\Delta]_\lambda \vdash \mathbb{I}\bar{c}_{[\nabla]_\lambda}. s \rightarrow_{\langle [R]_\lambda, \pi, p, \sigma \rangle} t$ の定義である. \square

例 4.9. $i \in \{1, 2\}$ に対して, 例 1.3 での書き換え規則 (\forall_i) は $(\forall_i^\#)$ と書き, 例 4.3 での書き換え規則 (\forall_i) は (\forall_i^\wedge) と書くことにする. このとき, $[(\forall_i^\#)]_\lambda$ を新しいアトム c を導入することで定めると, これは (\forall_i^\wedge) と一致する. また, $b \# Z$ に対して新しいアトム c' を導入することで $[b \# Z]_\lambda = (b \ c') \wedge Z$ と定めると, 定理 4.8 より $b \# Z \vdash t_1 \rightarrow_{\forall_i^\#} t_2 \rightarrow_{\forall_i^\#} t_3 \implies (b \ c') \wedge Z \vdash \mathbb{I}c. t_1 \rightarrow_{\forall_i^\wedge} t_2 \rightarrow_{\forall_i^\wedge} t_3$ となる. これらは, 例 1.3 および例 4.3 で行った書き換えである.

4.3 書き換え規則の一様性

非出現制約を用いた従来の名目書き換えシステムに対して、一様性というよい性質を持った書き換え規則からなるような、書き換えシステムのクラスを考えることがある。書き換えシステムの一様性は、合流性条件などに関わる重要な性質である [10, 11]。したがって、不動点制約による名目書き換えシステムにおいても、そのようなクラスに対応するような書き換えシステムとその性質について調べることは意義があると考えられる。本節では、文献 [10] を参考に不動点制約による名目書き換えにおける一様な書き換え規則を定義し、その性質を明らかにする。

不動点制約の推論規則を逆向きにたどることで、与えられた不動点制約を分解するような導出関係を、以下のように定義する。

定義 4.10. アトム \bar{c} の有限列、不動点制約の有限多重集合 Φ 、不動点環境 Υ 、名目項 t_0 の組 $\langle \bar{c}; \Phi \rangle^{\#(\Upsilon, t_0)}$ に対して、図 4.1 のようにして、導出関係 \rightsquigarrow を定める。ここで、

$$\frac{\langle \bar{c}; \pi \wedge f t, \Phi \rangle^{\#(\Upsilon, t_0)}}{\langle \bar{c}; \pi \wedge t, \Phi \rangle^{\#(\Upsilon, t_0)}} (\rightsquigarrow_f) \quad \frac{\langle \bar{c}; \pi \wedge (t_1, \dots, t_n), \Phi \rangle^{\#(\Upsilon, t_0)}}{\langle \bar{c}; \pi \wedge t_1, \dots, \pi \wedge t_n, \Phi \rangle^{\#(\Upsilon, t_0)}} (\rightsquigarrow_{\text{tup}})$$

$$\frac{\langle \bar{c}; \pi \wedge [a]t, \Phi \rangle^{\#(\Upsilon, t_0)}}{\langle \bar{c}, c_1; \pi \wedge (a c_1) \cdot t, \Phi \rangle^{\#(\Upsilon, t_0)}} (\rightsquigarrow_{\text{abs}})$$

図 4.1 \rightsquigarrow の導出規則

$(\rightsquigarrow_{\text{abs}})$ の c_1 は Υ や t_0 も含めて上式に出現しないアトムである。 $\#(\Upsilon, t_0)$ は適宜省略する。 \rightsquigarrow の反射推移閉包を \rightsquigarrow^* と書く。また、 $\langle \bar{c}; \Phi \rangle \rightsquigarrow^* \langle \bar{c}'; \Phi' \rangle$ で $\langle \bar{c}'; \Phi' \rangle$ が正規形であるとき、すなわち $\langle \bar{c}'; \Phi' \rangle \rightsquigarrow \langle \bar{c}''; \Phi'' \rangle$ なる $\langle \bar{c}''; \Phi'' \rangle$ が存在しないときは、 $\langle \bar{c}; \Phi \rangle \rightsquigarrow^! \langle \bar{c}'; \Phi' \rangle$ と書く。 \bar{c} が空列のときは $\langle \bar{c}; \Phi \rangle$ を $\langle \Phi \rangle$ と略記する。

注意 4.11. $\#(\Upsilon, t_0)$ は \rightsquigarrow による導出を行った段階で、 $(\rightsquigarrow_{\text{abs}})$ で導入されたアトム c_1 が他の場所で利用されていないことを明記するために用いられる (補題 4.15 や定理 4.21 の証明を参照)。

例 4.12. 例 2.10 の $\text{let } (f, \text{fun } [y]\text{app } (\text{app } (+, X), y))$ なる項に対して, 以下が成立する.

$$\begin{aligned} & \langle (y \ z) \ \wedge \ \text{let } (f, \text{fun } [y]\text{app } (\text{app } (+, X), y)) \rangle \\ & \xrightarrow{!} \langle c_1; (y \ z) \ \wedge \ f, (y \ z) \ \wedge \ +, (y \ z) \ \wedge \ (y \ c_1) \cdot X, (y \ z) \ \wedge \ c_1 \rangle. \end{aligned}$$

導出の過程を図 4.2 に示す.

$$\begin{aligned} & \langle (y \ z) \ \wedge \ \text{let } (f, \text{fun } [y]\text{app } (\text{app } (+, X), y)) \rangle \\ \rightsquigarrow & \langle (y \ z) \ \wedge \ (f, \text{fun } [y]\text{app } (\text{app } (+, X), y)) \rangle && (\rightsquigarrow_f) \\ \rightsquigarrow & \langle (y \ z) \ \wedge \ f, (y \ z) \ \wedge \ \text{fun } [y]\text{app } (\text{app } (+, X), y) \rangle && (\rightsquigarrow_{\text{tup}}) \\ \rightsquigarrow & \langle (y \ z) \ \wedge \ f, (y \ z) \ \wedge \ [y]\text{app } (\text{app } (+, X), y) \rangle && (\rightsquigarrow_f) \\ \rightsquigarrow & \langle c_1; (y \ z) \ \wedge \ f, (y \ z) \ \wedge \ \text{app } (\text{app } (+, (y \ c_1) \cdot X), c_1) \rangle && (\rightsquigarrow_{\text{abs}}) \\ \rightsquigarrow & \langle c_1; (y \ z) \ \wedge \ f, (y \ z) \ \wedge \ (\text{app } (+, (y \ c_1) \cdot X), c_1) \rangle && (\rightsquigarrow_f) \\ \rightsquigarrow & \langle c_1; (y \ z) \ \wedge \ f, (y \ z) \ \wedge \ \text{app } (+, (y \ c_1) \cdot X), (y \ z) \ \wedge \ c_1 \rangle && (\rightsquigarrow_{\text{tup}}) \\ \rightsquigarrow & \langle c_1; (y \ z) \ \wedge \ f, (y \ z) \ \wedge \ (+, (y \ c_1) \cdot X), (y \ z) \ \wedge \ c_1 \rangle && (\rightsquigarrow_f) \\ \rightsquigarrow & \langle c_1; (y \ z) \ \wedge \ f, (y \ z) \ \wedge \ +, (y \ z) \ \wedge \ (y \ c_1) \cdot X, (y \ z) \ \wedge \ c_1 \rangle. && (\rightsquigarrow_{\text{tup}}) \end{aligned}$$

図 4.2 \rightsquigarrow による導出の例

補題 4.13. 任意の $\langle \bar{c}; \Phi \rangle$ は強正規化可能. すなわち, \rightsquigarrow による任意の導出

$$\langle \bar{c}; \Phi \rangle \rightsquigarrow \langle \bar{c}_1; \Phi_1 \rangle \rightsquigarrow \langle \bar{c}_2; \Phi_2 \rangle \rightsquigarrow \dots$$

は, 有限回のうちに正規形で止まる.

(証明). $\langle \bar{c}; \Phi \rangle$ が正規形であれば $\langle \bar{c}; \Phi \rangle$ は自明に強正規化可能である. $\langle \bar{c}; \Phi \rangle$ は正規形ではないと仮定する. $\text{size}(\Phi) := \sum_{\pi \wedge t \in \Phi} \text{size}(t)$ と定義すると, 任意の導出 $\langle \bar{c}; \Phi \rangle \rightsquigarrow \langle \bar{c}'; \Phi' \rangle$ に対して \rightsquigarrow の定義より $\text{size}(\Phi) > \text{size}(\Phi')$ となり成立する. \square

定義 4.14. Φ の全ての要素が $\pi \wedge a$ あるいは $\pi \wedge \pi' \cdot X$ のような形をしているとき $\langle \bar{c}; \Phi \rangle$ は既約であるという. \rightsquigarrow と名目項の定義より, $\langle \bar{c}; \Phi \rangle$ が既約であることと正規形であることは同値である. 既約な $\langle \bar{c}; \Phi \rangle$ が $\pi \wedge a \in \Phi \implies \pi(a) = a$ をみたすとき, $\langle \bar{c}; \Phi \rangle$ は無矛盾であるという. (既約で) 無矛盾な $\langle \bar{c}; \Phi \rangle$ に対して, $\text{cont}(\Phi) := \{\pi \pi'^{-1} \wedge X \mid \pi \wedge \pi' \cdot X \in \Phi\}$ なる不動点環境を定義する.

補題 4.15. $\langle \bar{c}_1; \Phi_1 \rangle^{\#(\Upsilon, t_0)} \xrightarrow{*} \langle \bar{c}_2; \Phi_2 \rangle^{\#(\Upsilon, t_0)}$ ならば $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}_1. \Phi_1 \iff \Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}_2. \Phi_2$.

(証明). $\langle \bar{c}_1; \Phi_1 \rangle^{\#(\Upsilon, t_0)} \xrightarrow{*} \langle \bar{c}_2; \Phi_2 \rangle^{\#(\Upsilon, t_0)}$ のときに $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}_1. \Phi_1 \iff \Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}_2. \Phi_2$ が成立すれば, $\langle \bar{c}_1; \Phi_1 \rangle^{\#(\Upsilon, t_0)} \xrightarrow{*} \langle \bar{c}_2; \Phi_2 \rangle^{\#(\Upsilon, t_0)}$ の場合も導出の長さに関する帰納法によって, 同様の帰結が得られる. 仮定が $(\rightsquigarrow_{\text{abs}})$ による導出 $\langle \bar{c}; \pi \wedge [a]t, \Phi \rangle^{\#(\Upsilon, t_0)} \rightsquigarrow \langle \bar{c}, c_1; \pi \wedge (a \ c_1) \cdot t, \Phi \rangle^{\#(\Upsilon, t_0)}$ であるとする. このとき $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \pi \wedge [a]t, \Phi$ であれば, 導出規則 $(\wedge \text{abs})$ より, ある c_2 に対して $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_2. \pi \wedge (a \ c_2) \cdot t$ が得られるので, 補題 3.6 より $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. \pi \wedge (a \ c_1) \cdot t$ が成立する. また, 補題 3.7 より $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. \Phi$ も得られる. 逆に $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. \pi \wedge (a \ c_1) \cdot t, \Phi$ とすると, $(\wedge \text{abs})$ より直ちに $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \pi \wedge [a]t$ が成立する. c_1 の条件と補題 3.4 より $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \Phi$ も得られる. 他の規則による導出の場合も同様に, \rightsquigarrow の定義と不動点制約の導出規則より, 容易に示される. \square

系 4.16. $\langle \bar{c}; \Phi \rangle^{\#(\Upsilon, t_0)} \xrightarrow{!} \langle \bar{c}'; \Phi' \rangle^{\#(\Upsilon, t_0)}$ ならば $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \Phi \iff \Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}'. \Phi'$.

(証明). $\xrightarrow{!} \subseteq \xrightarrow{*}$ より, 直ちに成立する. \square

補題 4.17. 不動点環境 Υ と不動点制約の集合 Φ に対して $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \Phi$ と仮定する. このとき $\langle \bar{c}; \Phi \rangle^{\#(\Upsilon, t_0)} \xrightarrow{!} \langle \bar{c}'; \Phi' \rangle^{\#(\Upsilon, t_0)}$ ならば, $\langle \bar{c}'; \Phi' \rangle$ は無矛盾かつ $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}'. \text{cont}(\Phi')$.

(証明). 系 4.16 より $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \Phi \iff \Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}'. \Phi'$ が成立するので, $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \Phi$ より $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}'. \Phi'$ が得られる. $\langle \bar{c}'; \Phi' \rangle$ が無矛盾でないとする. $\pi(a) \neq a$ なる $\pi \wedge a$ が Φ' には含まれるが, このような $\pi \wedge a$ に対しては $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \pi \wedge a$ が成立せず, 仮定に矛盾する. よって $\langle \bar{c}'; \Phi' \rangle$ は無矛盾である. さらに, 命題 3.8 より $\Upsilon \vdash \mathcal{I}\bar{c}'. \text{cont}(\Phi')$ となる. \square

補題 4.18. 不動点環境 Υ_1, Υ_2 に対して, $\Upsilon_1 \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \Upsilon_2$ と $\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \pi \wedge t$ がともに成立するならば, $\Upsilon_1 \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \pi \wedge t$ となる.

(証明). 仮定 $\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \pi \wedge t$ の導出に関する帰納法で示す.

仮定が $(\wedge \mathbf{a})$ によって導出されているとき, t はアトム a で $\pi(a) = a$ をみたしている. Υ_1 を不動点環境として $(\wedge \mathbf{a})$ を用いると結論が得られる.

仮定が $(\wedge \text{var})$ によって導出されているとき, t は保留変数 $\pi' \cdot X$ で

$$\begin{aligned} \text{supp}(\pi^{\pi'^{-1}}) \setminus \{\bar{c}\} &\subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon_1 \cup \Upsilon_2)|_X)) \\ &= \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon_1|_X) \cup \text{perm}(\Upsilon_2|_X)) \\ &= \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon_1|_X)) \cup \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon_2|_X)) \end{aligned}$$

をみたしている. 任意の $\pi \in \text{perm}(\Upsilon_2|_X)$ は $\pi \wedge X \in \Upsilon_2$ をみたし, 仮定 $\Upsilon_1 \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \Upsilon_2$

と ($\lambda \mathbf{var}$) より

$$\text{supp}(\pi) \setminus \{\bar{c}\} \subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon_1|_X))$$

が成立するので,

$$\text{supp}(\text{perm}(\Upsilon_2|_X)) \setminus \{\bar{c}\} \subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon_1|_X))$$

が得られる. したがって

$$\begin{aligned} \text{supp}(\pi^{\pi'^{-1}}) \setminus \{\bar{c}\} &= (\text{supp}(\pi^{\pi'^{-1}}) \setminus \{\bar{c}\}) \setminus \{\bar{c}\} \\ &\subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon_1|_X)) \setminus \{\bar{c}\} \cup \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon_2|_X)) \setminus \{\bar{c}\} \\ &\subseteq \text{supp}(\text{perm}(\Upsilon_1|_X)) \end{aligned}$$

が成立し, ($\lambda \mathbf{var}$) より結論が得られる.

仮定が ($\lambda \mathbf{abs}$) によって導出されているとき t は抽象 $[a]t'$ で, ある新しいアトム c_1 に対して

$$\Upsilon_1, \Upsilon_2 \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. \pi \lambda (a \ c_1) \cdot t'$$

をみたしている. 補題 3.7 より

$$\Upsilon_1 \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. \Upsilon_2$$

が成立するので, 帰納法の仮定より

$$\Upsilon_1 \vdash \mathcal{I}\bar{c}, c_1. \pi \lambda (a \ c_1) \cdot t'$$

が得られる. さらに導出規則 ($\lambda \mathbf{abs}$) を用いることで結論が得られる.

そのほかの推論規則によって導出されている場合は, 帰納法の仮定を用いて容易に示される. \square

定義 4.19. 以下が成立するとき, 書き換え規則 R は一様であるという.

$$\Psi \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s \rightarrow_R t, \langle \bar{c}; \pi \lambda s \rangle^{\#(\Psi, t)} \xrightarrow{!} \langle \bar{c}'; \Phi \rangle^{\#(\Psi, t)} \implies \Psi, \text{cont}(\Phi) \vdash \mathcal{I}\bar{c}'. \pi \lambda t$$

ここで, $\langle \bar{c}'; \Phi \rangle^{\#(\Psi, t)}$ は無矛盾であるものとする.

非出現環境による名目書き換えでは, 非出現制約 $a\#s$ に対して定義 4.10 と似たような手続きを行い, その (一意な) 正規形 $\langle a\#s \rangle_{nf}$ を用いて, 次のように書き換え規則 R の一様性を定義している [10].

$$\Delta \vdash s \rightarrow_R t \implies \Delta, \langle a\#s \rangle_{nf} \vdash a\#t$$

ここで、 $\langle a\#s \rangle_{nf}$ には無矛盾性が定義されており、 $\langle a\#s \rangle_{nf}$ はその条件をみたしているものとする。このような書き換え規則 R は、この規則を用いた書き換えが非出現制約を保存するという、よい性質を持つことが知られている [10].

$$\Delta \vdash s \rightarrow_R t, a\#s \implies \Delta \vdash a\#t$$

不動点制約による名目書き換えに対して、定義 4.19 で与えた書き換え規則の一様性も、これと似たようなよい性質をもつ (定理 4.21).

補題 4.20. $\langle \bar{c}_1; \Phi_1 \rangle \overset{*}{\rightsquigarrow} \langle \bar{c}_2; \Phi_2 \rangle$ と導出できるとき、ある \bar{c}' に対して $\bar{c}_1, \bar{c}' = \bar{c}_2$ となる。したがって、 $\langle \bar{c}_1; \Phi_1 \rangle \overset{\downarrow}{\rightsquigarrow} \langle \bar{c}_2; \Phi_2 \rangle$ ならば、ある \bar{c}' に対して $\bar{c}_1, \bar{c}' = \bar{c}_2$ となる。

(証明). $\overset{*}{\rightsquigarrow}$ による導出の定義で、左辺の \bar{c} が右辺に必ずあることから明らか。 \square

これまでに示した補題を用いることで、一様な書き換え規則による書き換えが不動点制約を保存することを示すことができる。

定理 4.21. 一様な書き換え規則 R に対して、以下が成立する。

$$\Psi \vdash \mathcal{I}\bar{c}. s \rightarrow_R t, \pi \wedge s \implies \Psi \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \pi \wedge t.$$

(証明). 補題 4.13, 4.20 より $\langle \bar{c}; \pi \wedge s \rangle^{\#(\Psi, t)} \overset{\downarrow}{\rightsquigarrow} \langle \bar{c}, \bar{c}'; \Phi \rangle^{\#(\Psi, t)}$ とする。仮定 $\Psi \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \pi \wedge s$ に補題 4.17 を用いると $\Psi \vdash \mathcal{I}\bar{c}, \bar{c}'. \text{cont}(\Phi)$ が得られる。また、一様性の定義より $\Psi, \text{cont}(\Phi) \vdash \mathcal{I}\bar{c}, \bar{c}'. \pi \wedge t$ が得られる。ここで、補題 4.18 を用いると $\Psi \vdash \mathcal{I}\bar{c}, \bar{c}'. \pi \wedge t$ が得られる。 \bar{c}' は $\text{supp}(\pi)$ に含まれず t にも出現しないので、補題 3.4 より $\Psi \vdash \mathcal{I}\bar{c}. \pi \wedge t$ が得られる。 \square

注意 4.22. これまでに行った一様性に関する議論では、定義 4.1 で提案した名目書き換えの定義について一切言及していない。つまり、定義 4.19 の条件をみたすような、不動点環境 Ψ と束縛アトム \bar{c} と書き換え規則 R によって定まる、名目項上のあらゆる 2 項関係 $\Psi \vdash \mathcal{I}\bar{c}. - \bowtie_R -$ に対して、定理 4.21 は成立する。

最後に今後の課題として、一様性に関する 2 つの命題を予想として与える。前節で説明したような非出現制約による書き換えの定義に対して、次の条件は書き換え規則 $\nabla \vdash l \rightarrow r$ が一様であることの必要十分条件となっている [11].

$$\Delta \vdash \nabla, a\#l \implies \Delta \vdash a\#r$$

このことから、定義 4.1 で定めた不動点制約による名目書き換えに対して、次のような予想が立てられる。

予想 4.23. 書き換え規則 $R = \Upsilon \vdash l \rightarrow r$ に対して

$$\Psi \vdash \mathcal{N}\bar{c}. \Upsilon, \pi \wedge l \implies \Psi \vdash \mathcal{N}\bar{c}. \pi \wedge r$$

が成立することは R が一様であることの必要十分条件.

必要性は $\Psi \vdash \mathcal{N}\bar{c}. l \rightarrow_R r$ より明らかである. 十分性を示すことができれば, この条件を (定理 4.21 を成立させるような) より簡潔な一様性の定義として採用できる. また, 非出現制約による名目書き換えについて, 一様な書き換え規則は次のような性質をみたすことが知られている. これは危険対補題や合流性の解析などに用いられる性質である.

命題 4.24 ([11, Lemma 21]). R を (非出現制約による) 一様な書き換え規則とすると,

$$\Delta \vdash s' \approx_\alpha s \rightarrow_R t \implies \Delta \vdash s' \rightarrow_R t' \approx_\alpha t.$$

この事実から, 次のような予想が立てられる.

予想 4.25. R を一様な書き換え規則とすると,

$$\Psi \vdash \mathcal{N}\bar{c}. s' \overset{\wedge}{\approx}_\alpha s \rightarrow_R t \implies \Psi \vdash \mathcal{N}\bar{c}. s' \rightarrow_R t' \overset{\wedge}{\approx}_\alpha t.$$

これらの予想がもし成立すれば, この体系での危険対補題や合流性の性質を明らかにするにあたって有用であることが期待される.

第5章

結論

5.1 まとめ

本論文では，文献 [13] に基づく名目技法の体系における，項の置換に対する不動点制約や α 同値性に関して，以下を含む基本的な性質を明らかにした (第 3 章).

1. 文献 [13] で暗黙的に行われていた， \mathbb{N} による束縛アトムの子非自明な操作の妥当性.
2. 非対称な推論規則 $(\hat{\approx}_\alpha \mathbf{ab})$ に対して，対称的な派生規則 $(\hat{\approx}_\alpha \mathbf{ba})$ が成立すること.
3. α 同値性が同値関係であること (文献 [13] とは異なり別の体系に依存しない).

さらに，本論文では不動点制約による名目書き換えの枠組みを提案し，非出現制約による従来の名目書き換えとの比較を，以下のようにして行った (第 4 章).

1. 書き換え規則の文献 [13] を応用した変換手法の提案と，その変換によって従来の書き換えを本論文の書き換えで模倣できることの証明.
2. 文献 [10] を参考にした，本論文の体系における一様な書き換え規則の定義と，その基本的な性質の証明.
3. 文献 [11] の体系における一様性に関連した性質との比較による，一様性と同値な条件や合流性に関連した性質についての予想.

5.2 今後の課題

第 4 章で議論した一様性は，文献 [10] での名目書き換えにおいて，停止性と危険対の交差性に基づく合流条件を与えるために用いられている．本論文で定義した一様性は文

献 [10] と類似した性質をもつため，本論文の体系における合流条件を与えることに有用であることが期待され，これを調査することは今後の課題である．また，文献 [11] における名目書き換えでは文献 [10] とは異なる見通しのよい書き換えの定義を行い，その定義のもとで文献 [10] と同値になるような簡潔な条件を一様性の定義とすることで，実効的な合流性判定を行っている．本論文の第 4 章で予想した 2 つの命題は，文献 [11] において危険対補題や合流性の議論を行うために用いられた定理と比較して与えたものであった．したがって，これらの命題は本論文の体系での実効的な合流性判定に有用であることが期待され，その証明を与えることは本研究における課題である．さらに，文献 [13] の重要な結果として，不動点制約を用いた体系における，名目項の C 単一化の決定可能な手続きが提案されている．これを用いて，本論文の体系における名目書き換えの可換律を法とした合流性判定を行うことも，今後の課題として挙げられる．

謝辞

本研究を進めるにあたって、指導教員の青戸等人教授には、研究につまづくたびに大変多くのご助言をいただきました。また、文献調査や論文作成や外部発表といった研究活動に関して、全く不慣れであった私は多大なるご指導を賜りました。心より感謝申し上げます。セミナーなどでの議論を通じて多くの示唆をくださった研究室のみなさまや、研究会にて貴重なコメントをくださったみなさまにも、深く感謝いたします。最後に、大学院の学費や一人暮らしの生活費など、経済的に不自由がないよう資金援助していただき、いつも暖かく私を見守り続けてくれた家族に、心から感謝いたします。

参考文献

- [1] N. G. de Bruijn. Lambda Calculus Notation with Nameless Dummies, a Tool for Automatic Formula Manipulation, with Application to the Church-Rosser Theorem. Indagationes Mathematicae, 34:381–392, 1972.
- [2] A. Charguéraud. The Locally Nameless Representation. Journal of Automated Reasoning, 49(3):1–46, 2012.
- [3] F. Pfenning and C. Elliott. Higher-Order Abstract Syntax. ACM SIGPLAN Notices, 23(7):199–208, 1988.
- [4] M. J. Gabbay. A Theory of Inductive Definitions with α -equivalence. PhD thesis, DPMMS and Trinity College, University of Cambridge, 2000.
- [5] M. J. Gabbay and A. M. Pitts. A New Approach to Abstract Syntax with Variable Binding. Formal Aspects of Computing, 13(3–5):341–363, 2002.
- [6] A. M. Pitts. Nominal Sets: Names and Symmetry in Computer Science. Cambridge University Press, 2013.
- [7] C. Urban, A. M. Pitts, and M. J. Gabbay. Nominal Unification. Theoretical Computer Science, 323:473–497, 2004.
- [8] C. Urban. Nominal Isabelle. <https://nms.kcl.ac.uk/christian.urban/Nominal/>.
- [9] M. Fernández, M. J. Gabbay, and I. Mackie. Nominal Rewriting Systems. In Proceedings of the 6th PPDP, pages 108–119. ACM Press, 2004.
- [10] M. Fernández and M. J. Gabbay. Nominal Rewriting. Information and Computation, 205(6):917–965, 2007.
- [11] T. Suzuki, K. Kikuchi, T. Aoto, and Y. Toyama. Critical Pair Analysis in Nominal Rewriting. In Proceedings of the 7th SCSS, EPiC Series in Computing, volume 39, pages 156–168, 2016.

- [12] M. Ayala-Rincón, M. Fernández, and D. Nantes-Sobrinho. Fixed-point Constraints for Nominal Equational Unification. In Proceedings of the 3rd FSCD, Leibniz International Proceedings in Informatics, volume 108, pages 7:1–7:16, 2018.
- [13] M. Ayala-Rincón, M. Fernández, and D. Nantes-Sobrinho. On Nominal Syntax and Permutation Fixed Points. Logical Method in Computer Science, 16(1):19:1–19:36, 2020.